

Physik IV (Atomphysik)

Vorlesung SS 2003

Prof. Ch. Berger

Zusammenfassung

Das Skript gibt eine gedrängte Zusammenfassung meiner Vorlesung an der RWTH Aachen im SS 2003. Verglichen mit vielen, auch neueren Lehrbüchern wird versucht, alte Zöpfe abzuschneiden. Sie werden also keine Diskussion des Bohrschen Atom-Modells finden, die Behandlung des Zeeman-Effekts ist auf das nötigste zusammengedrängt, der Stark-Effekt fehlt, etc.etc. Bitte weisen Sie eventuell Ihre Prüfer im Vordiplom darauf hin.

6 Strahlungsprozesse

6.1 Auswahlregeln

In einer Gasentladung werden die Atome durch den Strom (also durch Elektronenstoß) in angeregte Zustände gebracht. Die Atome im Gas sind weit voneinander entfernt und beeinflussen sich daher nicht. Der Übergang in den Grundzustand oder einen anderen energetisch tiefer liegenden Zustand wird als spontane Emission bezeichnet. Diese ist im Rahmen der Schrödinger Theorie nicht berechenbar. Wir haben gesehen, daß in der Quantenmechanik der Erwartungswert von Observablen A aus Integralen der Art

$$\langle A \rangle = \int \psi^* A_{\text{op}} \psi dV \quad (366)$$

berechnet werden kann, worin A_{op} aus dem klassischen Ausdruck gewonnen wird. In der QED wird gezeigt, daß die Übergangsamplitude von einem Anfangszustand $|i\rangle = |A^*\rangle$ eines angeregten Atoms in einen Endzustand $|f\rangle = |A, \gamma\rangle$ von Atom+Photon in führender Ordnung durch das Matrixelement

$$T_{fi} = \langle f|T|i\rangle = \int \psi_f^* \mathbf{r}_{\text{op}} \psi_i dV \quad (367)$$

gegeben ist. Im Unterschied zu (366) tauchen in (367) Wellenfunktionen zu unterschiedlichen Zuständen auf. In (367) kann \mathbf{r} als das atomare elektrische Dipolmoment geteilt durch e interpretiert werden und daher erklärt sich der Name „elektrische Dipolnäherung“. Die abgestrahlte Leistung pro Atom wird aus der Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit \dot{w}_S der spontanen Emission mit Hilfe der Beziehung $P = \hbar\omega_0 \dot{w}_S$ zu

$$P = \frac{4\omega_0^4}{3c^2} \alpha \hbar |T_{fi}|^2 \quad (368)$$

berechnet. Diese Formel entspricht damit der Gleichung (140) für die Abstrahlung eines Elektrons auf einer Kreisbahn, wenn dort r^2 durch $|T_{fi}|^2$ ersetzt wird und ein zusätzlicher Faktor 2 die Abstrahlung von rechts- bzw. linkszirkular polarisierten Wellen durch rechts- und linksumlaufende Elektronen berücksichtigt. Außerdem ist $\omega_0 = \Delta W/\hbar$ wie immer in der Atomphysik.

Ohne weitere explizite Rechnung lassen sich aus dem Studium des Matrixelements T_{fi} die Auswahlregeln der elektrischen Dipolstrahlung gewinnen. Mit der Forderung, daß die Übergangsamplitude in einem gespiegelten Koordinatensystem ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) gleich der ursprünglichen Amplitude sein muß

$$-\int \psi_f^*(-\mathbf{r}) \mathbf{r}_{\text{op}} \psi_i(-\mathbf{r}) dV = \int \psi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{r}_{\text{op}} \psi_i(\mathbf{r}) dV \quad (369)$$

folgt

$$\Delta L = L_f - L_i = \pm 1 \quad (370)$$

Zur Begründung überlegen wir uns, daß die Spiegelung für die Winkel die Transformationen

$$\begin{aligned} \Theta &\rightarrow \pi - \Theta \\ \phi &\rightarrow \phi + \pi \end{aligned} \quad (371)$$

bewirkt. Mit Hilfe der Tabelle 2 lassen sich die Spiegelungseigenschaften

$$Y_{L,M}(\pi - \Theta, \phi + \pi) = (-1)^L Y_{L,M}(\Theta, \phi) \quad (372)$$

der Kugelflächenfunktionen verifizieren. Daher gilt

$$-1(-1)^{L_f+L_i} T_{fi} = T_{fi} \quad (373)$$

was für $L_f = L_i$ zu einem Widerspruch führt, falls T_{fi} nicht verschwindet. Neben (370) ist natürlich auch $\Delta l = \pm 3, 5..$ etc erlaubt. Die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten zeigt aber, daß diese Übergänge unterdrückt sind.

Die Beziehung (372) wird auch so interpretiert, daß Atome mit einer definierten Wellenfunktion $\psi_{n,L,M}$ sich in einem Zustand definierter Parität befinden. Der Paritätsoperator P spiegelt die Koordinaten und offenbar gilt die Eigenwertgleichung

$$PY_{L,M} = (-1)^L Y_{L,M} \quad (374)$$

Die Beziehung (369) legt die *Spiegelinvarianz* der elektromagnetischen Wechselwirkung fest. Zur großen Überraschung der Physiker, gilt sie nicht in der schwachen Wechselwirkung (β -Radioaktivität).

Im Magnetfeld ist die el. Dipolstrahlung polarisiert. Für eine Welle, deren Feldvektor in z -Richtung schwingt, trägt nur $\int \psi_f^* z \psi_i dV$ bei. Das Matrixelement enthält einen Faktor

$$\int e^{i(M_f - M_i)\phi} dV \quad (375)$$

und verschwindet demnach für $M_f \neq M_i$. Die Strahlung, die sich senkrecht zum Feld ausbreitet, ist in der Feldrichtung linear polarisiert. Es sind die π -Linien des Zeeman-Effekts mit der Auswahlregel $\Delta M = 0$. Jetzt untersuchen wir zirkular polarisierte Strahlung in z -Richtung. Hierzu tragen die Matrixelemente $\int \psi_f^*(x \pm iy\psi_i) dV$ bei. Sie enthalten einen Faktor

$$\int e^{i(M_f - M_i \pm 1)\phi} dV \quad (376)$$

und daher gehören die Übergänge mit $\Delta M \pm 1$ zu rechts bzw. linkszirkular polarisierten Wellen entlang der z -Richtung. Es sind die σ -Linien des Zeeman-Effekts.

Die Spins ändern sich bei der elektrischen Dipolstrahlung nicht. Aus den Regeln der Zusammensetzung der Drehimpulse folgern wir daher

$$\Delta J_z = 0, \pm 1 \quad (377)$$

und

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad (378)$$

wobei der Übergang $J = 0 \rightarrow J = 0$ aber verboten ist.

Die Auswahlregeln müssen im Teilchenbild so interpretiert werden, daß die Photonen den Spin 1 haben, wobei die beiden möglichen Einstellungen $s_z \pm 1$ zu rechts- bzw. linkszirkular

polarisierten Wellen gehören. Die an sich erwartete dritte Einstellmöglichkeit $s_z = 0$ fehlt. Es kann gezeigt werden, daß dies mit $m_\gamma = 0$ zusammenhängt.

Prozesse, bei denen der Spin des Atoms sich ändert, gehören zur magnetischen Dipolstrahlung, deren Matrixelement durch

$$T_{fi} = \int \psi_f^* \mathbf{J}_{\text{op}} \psi_i dV \quad (379)$$

festgelegt ist, weil das magnetische Moment proportional zum Drehimpuls ist. Drehimpulse ändern bei einer Spiegelung der Koordinaten ihr Vorzeichen nicht ($\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}$) und daher gilt die Auswahlregel $\Delta L = 0$. Magnetische Dipolübergänge erlauben aber Änderungen des Spins. Diese Übergänge sind jedoch typisch um einen Faktor v^2/c^2 unterdrückt.

6.2 Die Linienform

Die Zahl der Übergänge aus einem höheren in einen niederen Zustand ist durch das Zerfallsgesetz

$$dN = -N \frac{dt}{\tau} \quad (380)$$

bzw.

$$N = N_0 e^{-t/\tau} \quad (381)$$

bestimmt. Hierin ist N_0 die Zahl der angeregten Atome zur Zeit $t = 0$ und die Zeit τ wird als Lebensdauer des angeregten Zustands bezeichnet. In der Kernphysik ist der Gebrauch der Halbwertszeit $t_{1/2} = \tau \ln 2$ verbreitet.

Der Betrag der pro Atom abgestrahlten Leistung wird aus

$$P = \hbar\omega_0 \frac{dN}{Ndt} = \frac{\hbar\omega_0}{\tau} \quad (382)$$

berechnet. Durch Vergleich mit (368) finden wir

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4\omega_0^3}{3c^2} \alpha |T_{fi}|^2 \quad (383)$$

Anstelle der Lebensdauer wird besonders bei sehr kleinen Werten von τ die Zerfallsbreite

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \quad (384)$$

benutzt. Die numerische Umrechnung lautet $\Gamma = 65.823 \cdot 10^{-8} \text{ eVns}/\tau$.

Die elektrische Feldstärke der ausgestrahlten Welle hat für $t \geq 0$ das zeitliche Verhalten

$$E = E_0 e^{-t/(2\tau)} \cos \omega_0 t \quad (385)$$

Nach Fourier ist mit jeder Abweichung von einer rein periodischen Form ein Frequenzspektrum $\sim c(\omega)$ mit

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \quad (386)$$

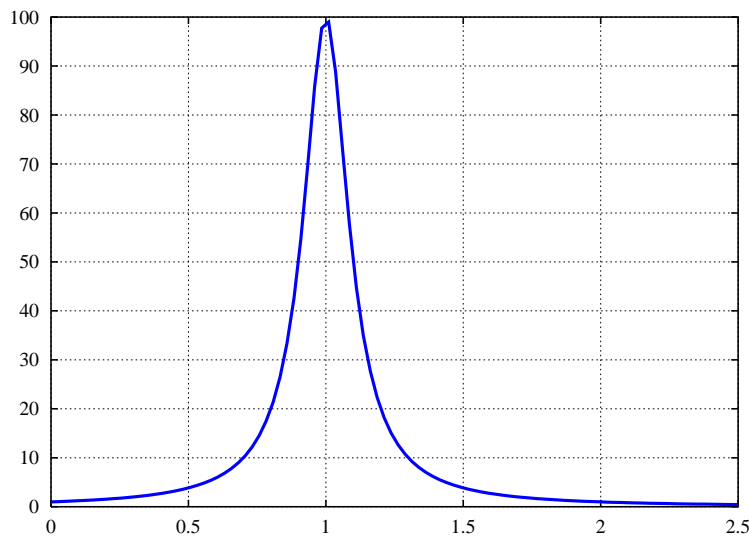


Abbildung 58: Lorentzkurve I/I_0 nach (388) aufgetragen gegen ω/ω_0 mit einer Halbwertsbreite $\Delta\omega = 0.2\omega_0$.

verbunden. Die Auswertung mit (385) ergibt

$$c(\omega) = -\frac{E_0}{2} \left(\frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \Delta\omega/2} + \frac{1}{i(-\omega_0 - \omega) - \Delta\omega/2} \right) \quad (387)$$

mit $\Delta\omega = 1/\tau$. Der erste Term überwiegt vollständig in der Umgebung von $\omega = \omega_0$ und wir vernachlässigen deshalb den Beitrag des zweiten Terms. Die Intensität der Spektrallinie hat daher die Form

$$I(\omega) = I_0 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Delta\omega)^2/4} \quad (388)$$

Die charakteristische Frequenzabhängigkeit dieser sog. Lorentz-Kurve ist in Abb. 58 gezeigt. $\Delta\omega$ hat die sehr anschauliche Bedeutung der Halbwertsbreite. Mit (384) folgt daher für die Energieunschärfe der Photonen

$$\Gamma = \hbar\Delta\omega = \frac{\hbar}{\tau}, \quad (389)$$

also

$$\Gamma\tau = \hbar \quad (390)$$

in Übereinstimmung mit der Unschärferelation.

Als Beispiel berechnen wir die Linienbreite der H_α Linie. Mit MAPLE finden wir sofort $T_{fi} = 1.85a_B^2$ und damit $\tau = 4.5 \cdot 10^{-8}$ s bzw. $\Gamma = 1.4 \cdot 10^{-8}$ eV. Solche für die Atomphysik typischen geringen Linienbreiten sind mit normalen optischen Methoden nicht meßbar. Die experimentelle Linienbreite ist meistens sehr viel größer als diese sog. natürliche Breite.

In einer Gasentladung stammt die größte Verbreiterung vom Doppler-Effekt. Gasatome, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegen, bewirken eine Frequenzverschiebung $\Delta\omega/\omega_0 = v/c$. Ausgehend von der Geschwindigkeitsverteilung

$$n(v)dv \sim e^{-W_{\text{kin}}/kT} \quad (391)$$

in einem Gas (Physik II), folgt die Intensitätsverteilung einer Gaußkurve

$$I(\omega) = I_0 \exp \left[\frac{-W_0}{kT} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (392)$$

mit der relativen Halbwertsbreite

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \left(\frac{2kT \ln 2}{W_0} \right)^{1/2}, \quad (393)$$

worin W_0 die Ruheenergie des Atoms ist. Für unser Beispiel ergibt dies bei 1000 K einen Wert von $1.56 \cdot 10^{-5}$. Das ist sehr groß verglichen mit $0.75 \cdot 10^{-8}$ für die natürliche Linienbreite.

6.3 Der schwarze Strahler

6.3.1 Strahlung fester Körper und Hohlraumstrahlung

Bisher haben wir uns nur mit den Strahlungsgesetzen einzelner räumlich gut getrennter Atome beschäftigt. Die Strahlung eines Gases wird durch die Summe der Strahlung der einzelnen Atome beschrieben.

Von großer praktischer und grundsätzlicher Bedeutung ist es jedoch, die Strahlung von festen Körpern quantitativ zu verstehen, man denke z.B. an die Strahlung einer Herdplatte oder der Sonne! Intuitiv erwarten wir ein kontinuierliches Frequenzspektrum. Es ist ein wesentliches Ergebnis der Festkörperphysik, daß in einem Kristall mit N regelmäßig angeordneten Atomen jede Linie in N Linien aufspaltet. Durch die Wechselwirkung benachbarter Atome wird es zusätzliche Verschiebungen und Verschmierungen geben, so daß im Termschema anstelle von Linien breite Bänder auftreten. In einem dichten ungeordneten Körper wird es sehr wenig erkennbare Strukturen der erlaubten Zustände geben.

Angesichts dieser Überlegungen erscheint es hoffnungslos, die spektrale Intensitätsverteilung

$$I_f = \frac{dI}{df} = \frac{d^2P}{dA df} \quad (394)$$

der von einem Oberflächenelment dA eines glühenden Körpers der Temperatur T ausgesandten Strahlung zu berechnen. Es stellt sich aber heraus, daß im Grenzfall des sog. schwarzen Strahlers eine exakte Berechnung möglich ist. Die zuerst von Max Planck im Jahre 1900 durchgeführte Rechnung gilt als einer der Startpunkte der Quantentheorie. Wir werden hier die Herleitung mit Hilfe der Regeln der QED durchführen.

Von Kirchhoff wurde gezeigt, daß I_f sich in ein Produkt

$$I_f(T, f, \dots) = \epsilon_A(f, \dots) I_f^B(T, f) \quad (395)$$

zerlegen läßt, worin I_f^B eine universelle Funktion ist (mit dem Index B für *black*) und $\epsilon_A(f, \dots)$ das spektrale Absorptionsvermögen eines bestimmten Körpers bezeichnet. Auf den Körper

auffallende Strahlung wird absorbiert bzw. reflektiert. $\epsilon_A df$ ist der Bruchteil der im Frequenzintervall zwischen f und $f + df$ absorbierten Intensität. Das Absorptionsvermögen hängt von der Frequenz und vielen weiteren Parametern (z.B. der Beschaffenheit der Oberfläche) ab, dies wird durch die Punkte im Argument von ϵ_A und I_f angedeutet. Einen Körper mit $\epsilon_A \equiv 1$, der also alle auffallende Energie absorbiert, bezeichnet man als „schwarz“. Wesentlich besser als durch einen schwarzen Anstrich kann diese Eigenschaft in einem auf der Temperatur T gehaltenen Hohlraum mit einer Öffnung der Fläche A erzielt werden, da es sehr unwahrscheinlich ist, daß von außen auf die Öffnung auftreffende Photonen, den Hohlraum wieder verlassen können (Abb. 59).

6.3.2 Atome im Strahlungsfeld

Die Beziehung (367) definiert die Übergangsamplitude der *spontanen* Emission. Unter Weglassung des Symbols für das emittierende Atom schreiben wir $T_{fi} = \langle \gamma | T | 0 \rangle$, die Amplitude beschreibt die Erzeugung eines Photons aus dem Vakuum in einen Zustand α mit einer ganz bestimmten Energie, Richtung und Polarisation. Diese Amplitude wird ab jetzt mit t_S abgekürzt.

Photonen sind Teilchen mit Spin eins, sie unterliegen also nicht dem Pauli-Verbot. Im Hohlraum des Volumens V kann es schon N_α Photonen mit genau den gleichen Eigenschaften geben. Ein wesentliches Ergebnis der QED besagt nun, daß die Amplitude für den Übergang von N_α nach $(N_\alpha + 1)$ Photonen im *gleichen* Zustand α durch

$$\langle (N_\alpha + 1)\gamma | T | N_\alpha\gamma \rangle = \sqrt{N_\alpha + 1} t_S \quad (396)$$

gegeben ist. Die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit

$$\dot{w} = (N_\alpha + 1)\dot{w}_S \quad (397)$$

ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für induzierte Emission

$$\dot{w}_I = N_\alpha \dot{w}_S \quad (398)$$

und der Wahrscheinlichkeit \dot{w}_S für spontane Emission.

Atome im Grundzustand können Photonen absorbieren. Für die zugehörige Amplitude $\langle (N_\alpha - 1)\gamma | T | N_\alpha\gamma \rangle$ gilt wegen der Invarianz der Naturgesetze gegen Spiegelungen des zeitlichen Ablaufs

$$\langle (N_\alpha - 1)\gamma | T | N_\alpha\gamma \rangle = \langle N_\alpha\gamma | T | (N_\alpha - 1)\gamma \rangle , \quad (399)$$

also

$$\langle N_\alpha\gamma | T | (N_\alpha - 1)\gamma \rangle = \sqrt{N_\alpha} t_S . \quad (400)$$

Hierzu gehört die Übergangswahrscheinlichkeit für induzierte Absorption

$$\dot{w}_A = N_\alpha \dot{w}_S . \quad (401)$$

Die Herleitung der Beziehung (396) ist auf verschiedenen Wegen möglich¹². Wir machen uns hier einen weiteren Lehrsatz aus der Quantentheorie von Vielteilchensystemen zunutze. Er besagt, daß die Wellenfunktion eines System von N Photonen symmetrisch gegenüber einer Vertauschung der Photonen sein muß. Dies ist der entscheidende Unterschied zwischen Bosonen (Teilchen mit Spin 0 oder 1) und Fermionen. Man sagt, Photonen genügen der Bose-Statistik, Elektronen der Fermi-Statistik. Im Gegensatz zu Elektronen können Photonen in genau gleichen Zuständen auftreten. Zwei Photonen im Zustand α werden dann durch

$$|\gamma\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma_1\gamma_2\rangle + |\gamma_2\gamma_1\rangle) \quad (402)$$

und 3 Photonen im gleichen Zustand durch

$$|\gamma\gamma\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\gamma_1\gamma_2\gamma_3\rangle + |\gamma_1\gamma_3\gamma_2\rangle + |\gamma_3\gamma_1\gamma_2\rangle + |\gamma_3\gamma_2\gamma_1\rangle + |\gamma_2\gamma_1\gamma_3\rangle + |\gamma_2\gamma_3\gamma_1\rangle) \quad (403)$$

beschrieben. Der Vorfaktor stellt die Normierung (z.B. $\langle\gamma\gamma|\gamma\gamma\rangle = 1$) sicher. Die Verallgemeinerung auf N Photonen ist klar. Es gibt $N!$ Permutationen und der Vorfaktor lautet $1/\sqrt{N!}$. Nun gilt für die Übergänge offensichtlich

$$\langle\gamma_1\gamma_2\gamma_3|T|\gamma_1\gamma_2\rangle = \langle\gamma_1\gamma_2||\gamma_1\gamma_2\rangle\langle\gamma_3|T|0\rangle = t_S \quad , \quad (404)$$

aber

$$\langle\gamma_1\gamma_2\gamma_3|T|\gamma_2\gamma_1\rangle = 0 \quad , \quad (405)$$

da die Zustände $|\gamma_1\gamma_2\rangle$ und $|\gamma_2\gamma_1\rangle$ orthogonal zueinander sind. Mit ähnlichen Argumenten für die anderen möglichen Kombinationen ist daher die Amplitude für den Übergang von zwei nach drei Photonen durch $t_S 3!/\sqrt{2!3!}$ gegeben. Die Verallgemeinerung liefert das Ergebnis (396)

$$\langle(N_\alpha + 1)\gamma|T|N_\alpha\gamma\rangle = \frac{(N_\alpha + 1)!}{\sqrt{N_\alpha!(N_\alpha + 1)!}}t_S = \sqrt{(N_\alpha + 1)}t_S \quad . \quad (406)$$

6.3.3 Das Strahlungsgesetz von Planck

Nach diesen nicht ganz einfachen Überlegungen, (die beim ersten Lesen auch überschlagen werden können), wollen wir nun die Zahl N_α der Photonen im Hohlraum finden, die sich in einem ganz bestimmten Zustand α befinden. Dazu stellen wir uns vor, daß es in den Wänden des Hohlraums Atome gibt, deren Anregungsenergie genau der Energie der Photonen im Zustand α entspricht. Diese sollen sich im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung im Hohlraum befinden. Damit soll gesagt werden, daß die Gesamtzahl der Absorptionsprozesse gleich der Gesamtzahl der Emissionsprozesse ist. Mit N_1 Atomen im Grundzustand und N_2 Atomen im angeregten Zustand bedeutet dies

$$N_1\dot{w}_A = N_2(\dot{w}_I + \dot{w}_S) \quad . \quad (407)$$

¹²Siehe z.B. die elementare Diskussion in Feynman Lectures of Physics, Band 3, oder Feynmans Buch Quantum Electrodynamics oder im Lehrbuch Relativistische Quantentheorie von Landau und Lifshitz.

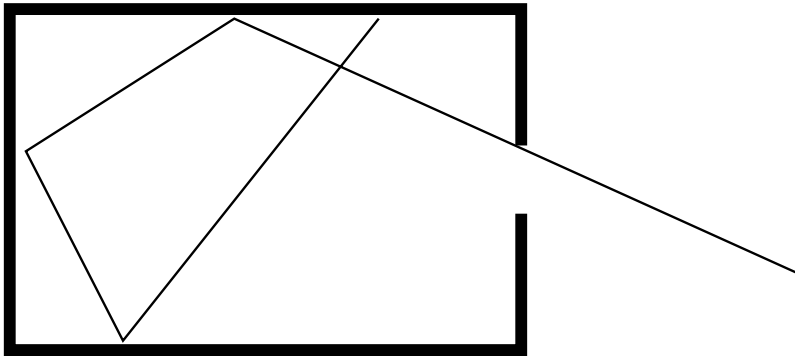


Abbildung 59: Der Hohlraum als Modell eines idealen schwarzen Strahlers.

Daraus wird mit Hilfe von (397) und (401)

$$N_1 N_\alpha \dot{w}_S = N_2 (N_\alpha + 1) \dot{w}_S . \quad (408)$$

Nun benutzen wir das Gesetz von Boltzmann

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\Delta W/kT} , \quad (409)$$

welches das Verhältnis der Zahl der Atome im angeregten Zustand und im Grundzustand festlegt, falls thermisches Gleichgewicht vorliegt. Einsetzen in (408) und Auflösen nach N_α ergibt mit $\Delta W = W_\gamma$

$$N_\alpha = \frac{1}{e^{W_\gamma/kT} - 1} . \quad (410)$$

In diesem Grundgesetz der Bose-Statistik ist die Zahl und Beschaffenheit der Atome des Strahlers überhaupt nicht mehr enthalten! Was zunächst kompliziert erschien, ist besonders einfach geworden. Wir fassen nun W_γ als Variable auf. In (410) ist auch die Richtung und die Polarisation der Photonen festgelegt. Um die Zahl dN_γ der Photonen mit Energien zwischen W_γ und $W_\gamma + dW_\gamma$ zu erhalten müssen wir (410) mit der Zahl dN_Z der Zustände mit Energien zwischen W_γ und $W_\gamma + dW_\gamma$ multiplizieren, $dN_\gamma = N_\alpha dN_Z$. Zur Berechnung von dN_Z formen wir (311) ein wenig um und multiplizieren mit einem Faktor 2, um die beiden Polarisationen von Photonen zu berücksichtigen, daher gilt

$$dN_Z = \frac{V W_\gamma^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} dW_\gamma . \quad (411)$$

Die Anzahldichte der Photonen ist durch $n_\gamma = N_\gamma/V$ festgelegt und damit folgt

$$\frac{dn_\gamma^B}{dW_\gamma} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{W_\gamma^2}{e^{W_\gamma/kT} - 1} \quad (412)$$

als erste Form des Planckschen Strahlungsgesetzes für die Hohlraum- oder Schwarzkörperstrahlung. Die Energiedichte der Strahlung ist durch $u = W_\gamma n_\gamma$ definiert, damit ergibt sich die Dichteverteilung $u_W = du/dW_\gamma$ zu

$$u_W^B = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{W_\gamma^3}{e^{W_\gamma/kT} - 1} , \quad (413)$$

während die spektrale Energiedichte $u_f^B = du^B/df$ durch

$$u_f^B = \frac{16\pi^2\hbar}{c^3} \frac{f^3}{e^{2\pi\hbar f/kT} - 1} \quad (414)$$

gegeben ist.

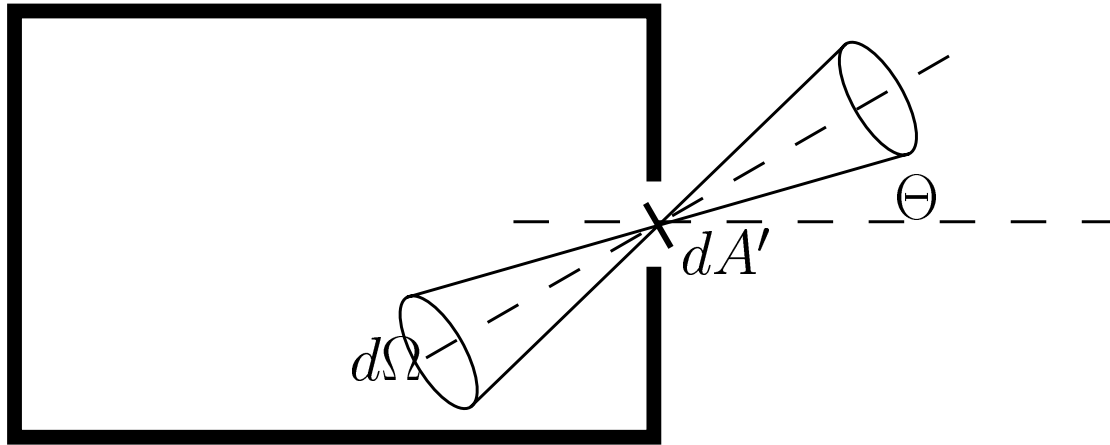


Abbildung 60: Zur Herleitung von (416).

Schließlich brauchen wir noch I_f^B die spektrale Verteilung der von der Öffnung des Hohlraums oder einem Flächenelement dA eines schwarzen Körpers emittierten Intensität. Zur Berechnung betrachten wir die Abb. 60. Im Kegel mit dem Öffnungswinkel $\Delta\Omega$ ist der Bruchteil $u_f^B d\Omega/4\pi$ der Energiedichte enthalten. Für die Intensität erhalten wir die Winkelverteilung

$$\frac{dI_f^B}{d\Omega} = \frac{u_f}{4\pi} c \cos \Theta, \quad (415)$$

da $dA' = dA/\cos \Theta$ die wirksame Fläche senkrecht zur Kegellachse ist. Die Integration über den Raumwinkel ergibt

$$I_f^B = \frac{4\pi^2\hbar}{c^2} \frac{f^3}{e^{2\pi\hbar f/kT} - 1} \quad (416)$$

als vierte Form des Planckschen Gesetzes. Der berühmte Funktionsverlauf ist für $T = 3000$ K und $T = 6000$ K in Abb. 61 gezeigt.

Die Sonne ist näherungsweise ein schwarzer Strahler mit einer Temperatur von 5780 K. Das Weltall ist ein idealer schwarzer Strahler mit einer Temperatur von 2.726 K, Abb. 62. Rechnungen zeigen, daß bei einer Temperatur von 3000 K in einem Wasserstoffgas nicht mehr genügend Ionisationsprozesse stattfinden, um ein Gleichgewicht zwischen Ionisation und Rekombination aufrecht zu erhalten. Das Gas wird für die Photonen durchsichtig. Die kosmische Hintergrundstrahlung stammt also aus einer Zeit mit einer Temperatur des Weltalls von 3000 K. Dieses hat sich seitdem um einen Faktor 1100 ausgedehnt, wobei die Temperatur um den gleichen Faktor abgenommen hat.

Das Maximum der spektralen Intensität (Kurvendiskussion!) liegt bei

$$\lambda_{\max} = \frac{a}{T} \quad (417)$$

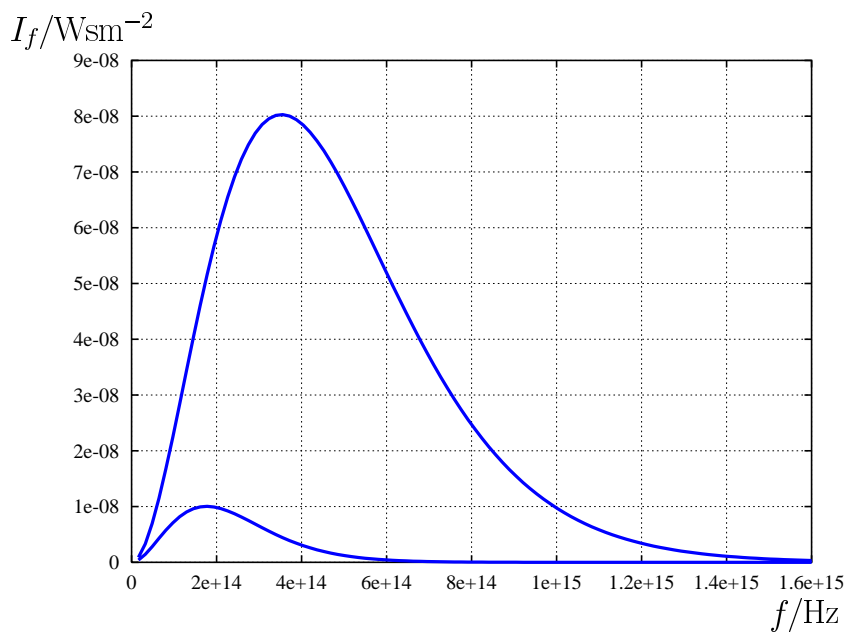


Abbildung 61: Die spektrale Intensität der Strahlung eines schwarzen Körpers nach (416) für $T = 3000 \text{ K}$ (untere Kurve) und $T = 6000 \text{ K}$ (obere Kurve).

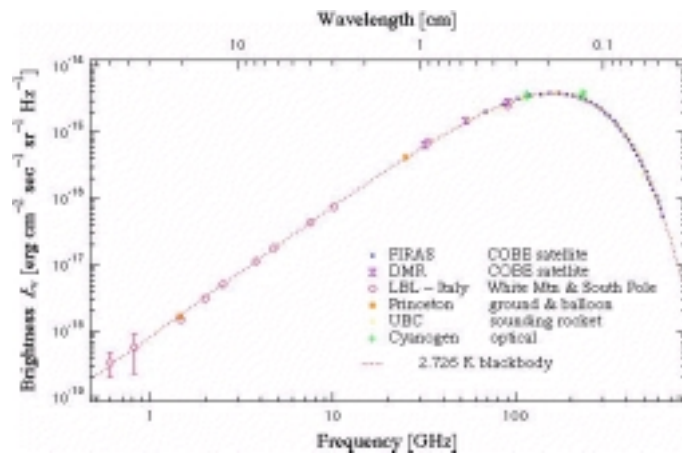


Abbildung 62: u_f der kosmischen Hintergrund-Strahlung und Vergleich mit der Planck-Formel.

mit $a = 5.08 \cdot 10^5 \text{ nmK}$. Das ist das sog. Wiensche Verschiebungsgesetz. Die Integration von (416) über die Frequenz ergibt das Stefan-Boltzmann Gesetz der Gesamtintensität

$$I^B = \sigma T^4 \quad (418)$$

mit

$$\sigma = \frac{\pi^5 k^4}{60 \hbar^3 c^2} \quad (419)$$

Der numerische Wert von σ ist $5.6705 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.

6.3.4 Die Einstein Koeffizienten

Von Einstein wurde eine Begründung der Planckschen Formel angegeben, die unserer Ableitung sehr nahe kommt. Er führte die Begriffe spontane Emission, induzierte Emission und induzierte Absorption ein. Sie sind durch Koeffizienten A_{12} , B_{12} und B_{21} mit $B_{21} = B_{12}$ gekennzeichnet. Einstein argumentierte, daß die Wahrscheinlichkeit für induzierte Emission und Absorption proportional zur Energiedichte u_f des Strahlungsfeldes sein muß, die Bilanzgleichung lautet also

$$N_1 B_{12} u_f = N_2 (A_{12} + u_f B_{12}) . \quad (420)$$

Der Vergleich mit (408) ergibt

$$\frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{16\pi^2 \hbar f^3}{c^3} . \quad (421)$$

6.4 Der Drei-Niveau-Laser

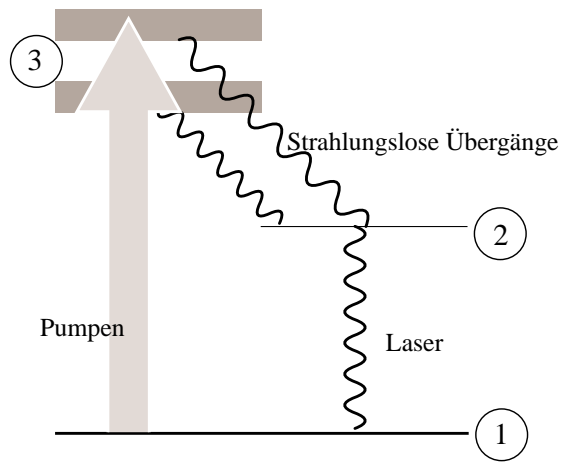


Abbildung 63: Prinzip des Drei-Niveau-Lasers. Durch optische Anregung werden die Energiebänder 3 gefüllt. Von dort gibt es strahlungslose Übergänge in das Niveau 2, welches eine lange Lebensdauer hat. Es wird $N_2 \gg N_1$ erreicht. Die Laserstrahlung ist durch induzierte kohärente Emission von 2 nach 1 gekennzeichnet.

In einem Laser ist die Verteilung der Besetzungszahlen nicht thermisch. Einfachstes Beispiel: Drei-Niveau-Laser (Abb. 63). Durch das Pumpen und die (strahlungslosen) Übergänge in das Niveau 2 (mit relativ langer Lebensdauer) wird $N(W_2) \gg N(W_1)$ erreicht. Ein Photon wird spontan aus 2 emittiert und läuft durch das Material. Durch den Prozeß der induzierten Emission werden wegen (397) aus den anderen Atomen bevorzugt Photonen ausgelöst, die sich im exakt gleichen Zustand befinden (Abb. 64). Mit $N_2 \gg N_1$ gilt angenähert

$$\frac{dN_\alpha}{dt} = N_2 \dot{w}_S N_\alpha, \quad (422)$$

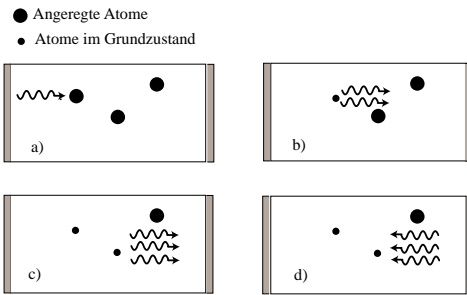


Abbildung 64: Stimulierte Emission. a) Das erste Photon kurz vor dem Stoß, b) Das Atom hat ein Photon emittiert, c) Das Photon nach dem Stoß mit dem 2. Atom, d) Die 3 Photonen sind vom Spiegel reflektiert worden.

die Zahl der Photonen im gleichen Zustand steigt also exponentiell an. Spiegel am Ende bewirken eine Umkehrung der Richtung der Photonen, so daß der Prozeß nicht frühzeitig abbricht. Die Photonen sind kohärent, d.h. die entstehende elektromagnetische Welle ist über den Querschnitt des Lasers phasengleich. Damit ist der Laser eine Quelle ebener elektromagnetischer Wellen, deren Winkeldivergenz nur durch die Beugung gegeben ist. Durch halbdurchlässige Spiegel an einem Ende kann die resultierende ebene Welle ausgekoppelt werden.