

Physik IV (Atomphysik)

Vorlesung SS 2003

Prof. Ch. Berger

Zusammenfassung

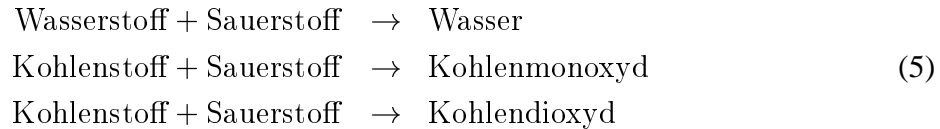
Das Skript gibt eine gedrängte Zusammenfassung meiner Vorlesung an der RWTH Aachen im SS 2003. Verglichen mit vielen, auch neueren Lehrbüchern wird versucht, alte Zöpfe abzuschneiden. Sie werden also keine Diskussion des Bohrschen Atom-Modells finden, die Behandlung des Zeeman-Effekts ist auf das nötigste zusammengedrängt, der Stark-Effekt fehlt, etc.etc. Bitte weisen Sie eventuell Ihre Prüfer im Vordiplom darauf hin.

2 Atome und Kerne

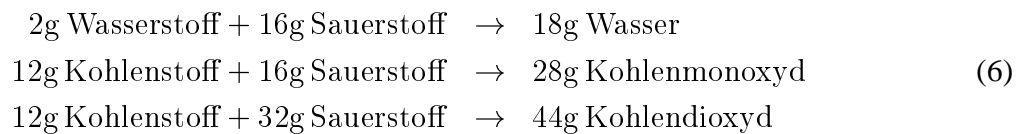
2.1 Die atomare Struktur der Materie

2.1.1 Daltons chemische Gesetze

Chemische Reaktionen verlaufen in festen Massenverhältnissen ab. Beispiele:



Links stehen Elemente, d.h. Stoffe, die sich chemisch nicht weiter zerlegen lassen, rechts Verbindungen, hier Oxyde. Für die Massenumsätze gilt mit einer Genauigkeit von einigen Promille:



Einfache Erklärung dieser Tatsachen durch Zusammensetzung harter „Bälle“, der Atome.



Da Wasserstoff- und Sauerstoffatome Moleküle bilden (H_2 , O_2), schreiben die Chemiker diese Gleichungen ein wenig anders, z.B.



Durch die chemischen Massenverhältnisse wird die relative Atommasse (Molekülmasse) definiert,

$$M_r = \frac{M_{\text{Atom}}}{M_{\text{H}}} . \quad (9)$$

Damit wird $M_r(\text{H}) = 1$, es gibt kein leichteres Element. Moderne Bestimmungen von M_r nehmen als Bezug 1/12 der Masse des ^{12}C Isotops (s.u.). Damit wird $M_r(\text{H}) \neq 1$.

Im Periodensystem der Elemente wächst M_r kontinuierlich an. Schon sehr früh ist M_r nicht mehr durch ganze Zahlen gegeben. Die Atomtheorie besagt, daß in M_r kg eines Elementes oder einer Verbindung die gleiche Anzahl Atome oder Moleküle enthalten ist. Daher Definition der Stoffmenge ν (Einheit kmol)

$$\nu = \frac{m}{M_r} \frac{\text{kmol}}{\text{kg}} . \quad (10)$$

Bei Benutzung der Masseneinheit kg hat ν also die Einheit kmol. Die Anzahl der Atome in einer Stoffprobe ist dann durch

$$N = N_A \nu \quad (11)$$

gegeben, wodurch die zentrale Konstante der Atomphysik die Avogadrokonstante N_A definiert ist. Die Atomtheorie überzeugt nur, wenn verschiedene Meßverfahren den gleichen Wert für N_A ergeben. Das ist nur noch historisch interessant. Mit Massenspektrometern (s.u.) kann man sehr genaue absolute Atommassen oder Ruheenergien bestimmen, die als Vielfache der atomaren Masseneinheit

$$u = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (12)$$

bzw.

$$uc^2 = 931.49 \text{ MeV} \quad (13)$$

angegeben werden. Mit $m = N M_r u$ folgt daher

$$N_A = \frac{1 \text{ kg}}{u \text{ kmol}} = 6.0221 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1} . \quad (14)$$

2.1.2 Gasgesetze

Der Zusammenhang zwischen Druck p und Volumen V ist bei sog. idealen Gasen (Edelgase) durch

$$pV = \nu RT \quad (15)$$

gegeben. Hierin ist T die absolute Temperatur (Einheit Kelvin, K). Diese ist durch

$$T = T_n + \vartheta \frac{\text{K}}{^\circ\text{C}} \quad (16)$$

an die Celsius-Temperatur ϑ angebunden. Die Normtemperatur T_n beträgt 273.15 K. Die allgemeine Gaskonstante wurde zu $R = 8314.5 \text{ WsK}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$ gemessen. Normaldruck (Normdruck) $p_n = 1.0133 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Das Gasgesetz besagt, daß das molare Volumen V_m eines Gases und daher die Anzahl der Atome in einem Gasvolumen bei konstantem p und T nicht von der Atomsorte abhängt. Das Normvolumen V_n ist gleich dem Molvolumen V_m bei Normalbedingungen, $V_n = 22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$.

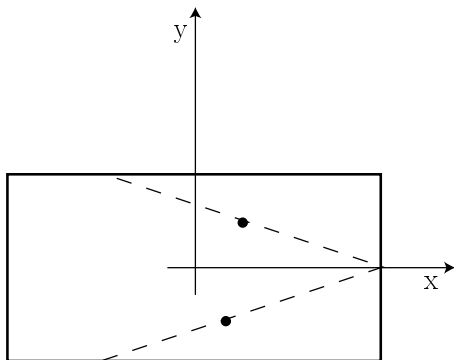


Abbildung 1: Zur Ableitung des Gasgesetzes.

Die kinetische Gastheorie erklärt (15). In einem Volumen V haben die Atome der Masse m die Geschwindigkeitskomponente v_x auf die rechte Wand der Abb. 1. Für den einzelnen Kraftstoß $\int F dt$ gilt angenähert

$$F_x \Delta t = m \Delta v_x . \quad (17)$$

Bei der Reflexion an der Wand gilt $\Delta v_x = 2v_x$ und mit $\Delta t = 2l/v_x$ folgt

$$F_x = \frac{2mv_x}{\Delta t} \quad (18)$$

also für den allseitig gleichen Druck p

$$p = p_x = N \frac{m}{V} v_x^2 \quad (19)$$

Im statistischen Mittel gilt $\overline{v_x^2} = \overline{v^2}/3$, also

$$pV = \frac{2}{3} N \overline{W}_{\text{kin}} \quad (20)$$

Hiermit wird klar, daß die Wärmeenergie Q durch die kinetische Energie der Atome festgelegt wird (in einem Gas aus harten Kugeln). Für jede Änderung der Wärmeenergie folgt

$$\Delta Q = N \Delta \overline{W}_{\text{kin}} \quad (21)$$

Mit $N = N_A \nu$ folgt schließlich

$$pV = NkT = \nu RT \quad (22)$$

und

$$\overline{W}_{\text{kin}} = \frac{3}{2} kT \quad (23)$$

worin $k = R/N_A$ die Boltzmannkonstante (mit dem Zahlenwert $1.3806 \cdot 10^{-23} \text{ WsK}^{-1}$ bzw. $8.6173 \cdot 10^{-5} \text{ eVK}^{-1}$) ist. Die Gleichung (23) enthält die allgemeinste Definition der Temperatur unabhängig vom Aggregatzustand des Stoffes.

2.2 Elektronen

2.2.1 Nachweis von freien Elektronen

Der Zusammenhang von Elektromagnetismus und Atomaufbau war schon früh klar. In der Elektrolyse werden Verbindungen in Elemente zerlegt, z.B. wird beim Durchleiten von Strom durch eine Salzlösung (NaCl) an der Kathode (– Pol) Natrium und an der Anode (+ Pol) Chlor abgeschieden. Beim Durchleiten von Strom durch Gase (Gasentladungen) werden Atome ionisiert, d.h. es werden Strahlen („Kanalstrahlen“) positiv geladener Atome hergestellt, die durch ein Loch in der Kathode in den Experimentierraum gelangen.

Erklärung dieser Effekte durch Theorie des Atomaufbaus. Atome bestehen aus einem Kern und der Elektronenhülle. Das Elektron trägt die negative Elementarladung e . Der Kern des Wasserstoffatoms ist das Proton (p). Bei der Ionenbindung (z.B. NaCl) gibt das Natrium ein Elektron an das Chlor Atom ab, es wird zum Na^+ -Ion, das Cl zum Cl^- -Ion. Bindung aufgrund der elektrischen Anziehung. In der Elektrolyse wird diese Bindung aufgebrochen. Aus der Atomtheorie folgt das Grundgesetz der Elektrolyse: Zum Abscheiden einer bestimmten Stoffmenge ist immer die gleiche Elektrizitätsmenge nötig (Faraday). Für einfach geladene Ionen gilt

$$Q_F = N_A e \quad (24)$$

mit $Q_F = 9.6485 \cdot 10^7 \text{ C kmol}^{-1}$. Damit folgt

$$e = \frac{Q_F}{N_A} = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (25)$$

Der direkte Nachweis des Elektrons gelingt durch die Kathodenstrahlen (Abb. 2) der Gasentladung (Loch in der Anode). Die Ablenkung dieser Strahlen in elektrischen und magnetischen Feldern (Abschnitt 2.3) beweist die negative Ladung und zeigt, daß die spezifische Ladung e/m das 1836-fache des Wertes für Protonen beträgt.

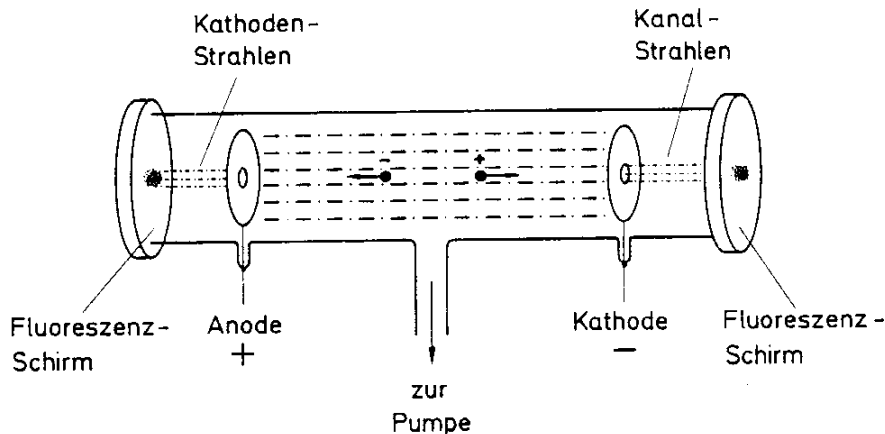


Abbildung 2: Gasentladungsröhre zur Erzeugung von Kathoden- und Kanalstrahlen. Zwischen Anode und Kathode liegt eine Spannung von einigen 1000 Volt. Die im Rohr auftretenden Leuchterscheinungen und die Ausbildung von Kathoden- und Kanalstrahlen hängen stark vom Druck ab. Im feldfreien Raum zwischen Kathode und Fluoreszenzschirm sieht man den Kanalstrahl, der aus positiven Ionen besteht. In dieser Weise erzeugte Kanal- und Kathodenstrahlen waren in der Frühzeit der Atomphysik von besonderer Bedeutung für die Untersuchung von Ladung, Masse und Streuquerschnitt von Elektronen und Ionen. Abb. entnommen aus Haken, Wolf Atom und Quantenphysik.

Sehr einfach lassen sich freie Elektronen durch Glühen eines Metalldrahtes herstellen (wird millionenfach in den Kathodenstrahlröhren der Fernsehgeräte und Oszillographen benutzt). In einem Metall gibt es mindestens ein freies Elektron/Atom, es existiert also eine Elektronengas mit einer Dichte

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{N_A \varrho \text{ kmol}}{M_r \text{ kg}} \quad (26)$$

Für Kupfer ergibt sich z.B. $0.85 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$, also etwa 3000mal mehr als bei einem idealen Gas unter Normalbedingungen.

Der Nachweis der korpuskularen Natur der Elektronen kann z.B. durch Zählen in einem Geigerzählrohr (Abb. 3) erfolgen. Es besteht aus einem gasgefüllten Metallrohr, zwischen dessen isolierenden Endkappen auf der Mittelachse des Rohres ein dünner Draht gespannt ist. Zwischen Draht und Metallwand wird eine Spannung U_0 angelegt, so daß der Draht als Anode und das Rohr als Kathode wirkt.

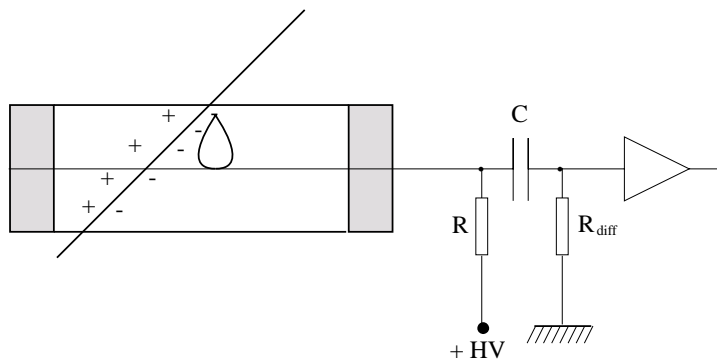


Abbildung 3: Prinzip eines Proportionalzählrohrs. Von den primär erzeugten Elektronen breiten sich tropfenförmige Elektronenlawinen aus.

Ionisierende Strahlung, die von außen in das Zählrohr eindringt, bewirkt im Zählgas (meist Argon) die Bildung von Elektron-Ionen-Paaren. Die Ionen driften zur Kathode, die Elektronen zur Anode. Das elektrische Feld in diesem Zählrohr steigt in Richtung zur Achse gemäß

$$E(r) = \frac{U_0}{r \ln r_a/r_i} \quad (27)$$

an, wobei r_a der Radius des Rohres, r_i der Radius des Drahtes und r der Abstand eines Teilchens von der Mittelachse ist. In der Nähe eines dünnen Drahtes können daher die primär erzeugten Elektronen so beschleunigt werden, daß ihre kinetische Energie zur Bildung neuer Elektron-Ionen-Paare ausreicht. Die Durchrechnung des Problems zeigt, daß die Zahl der auf diese Art erzeugten Sekundärelektronen exponentiell ansteigt, es entsteht in unmittelbarer Nähe des Drahtes ($\approx 20\mu\text{m}$) eine Lawine aus Elektron-Ionen-Paaren. Dieser Mechanismus wird als Gasverstärkung bezeichnet. Sie läßt sich durch die geeignete Wahl von U_0 so einstellen, daß die Anzahl der sekundären Ladungen proportional zur Zahl der durch das einfallende Teilchen primär erzeugten Elektron-Ionen-Paare bleibt. Diese Eigenschaft ist besonders wichtig, wenn der Energieverlust der einfallenden Teilchen im Zählgas gemessen werden soll.

Da die Spannung U_0 über einen Ladewiderstand angeschlossen wird, erzeugt der Strom im Zählrohr einen Spannungsabfall am Widerstand, der über einen Verstärker an die nachfolgende Ausleselektronik weitergeleitet wird. Ein Elektron bewegt sich im Feld des Zählrohrs aufgrund seiner höheren Driftgeschwindigkeit etwa tausendmal schneller als ein Ion. Mit $r_a = 1\text{ cm}$ und einer Driftgeschwindigkeit von $5\text{ cm}/\mu\text{s}$ dauert das gesamte von den Elektronen erzeugte Signal etwa 200 ns . Die Anstiegszeit ist noch wesentlich geringer. Das Signal wird mit dem Differenzglied aus Kondensator und Widerstand R_{diff} (Abb. 3), dessen Zeitkonstante der Anstiegszeit angepaßt ist, von dem viel langsameren Ionensignal abgetrennt. Das Prinzip des Geiger-Zählers wird in verschiedenen Varianten in modernen Detektoren verwendet. Es ist vor allem gelungen, viele Drähte in einem einzigen Gasvolumen gleichzeitig zu betreiben.

2.2.2 Ladung und Masse des Elektrons

Aus der Ableitung von (25) geht nicht hervor, daß diese Ladung quantisiert ist, d.h. daß jede Ladung nur in Vielfachen dieser Einheit auftreten kann. Dieser Beweis wurde im Millikanschen Öltropfenversuch (1913) geführt. Das Prinzip ist in Abb. 4 gezeigt, die technische

Durchführung in Abb. 5. Beim Erzeugen der Öltröpfchen werden diese aufgeladen (Reibung), die Ladung kann durch Bestrahlen mit Röntgenstrahlen geändert werden. Im Kondensator wirken Gravitationskraft, elektrische Kraft und geschwindigkeitsabhängige Reibung (Gesetz von Stokes, Viskosität η), also

$$F_y = -mg + qE - 6\pi a\eta v_E \quad (28)$$

Beobachtet wird die konstante Steig-oder Sinkgeschwindigkeit bei Kräftegleichgewicht ($F_y = 0$). Der Radius a der Tröpfchen wird in einem Vorversuch aus der Sinkgeschwindigkeit v_S ohne Feld ermittelt,

$$\frac{4\pi}{3}\rho a^3 g = 6\pi a\eta v_S . \quad (29)$$

Das Ergebnis des Versuchs war, daß alle gemessenen Ladungen nur als ganzzahlige ($n = 1, 2, 3, \dots$) Vielfache von e auftraten, $q = ne$. Moderne Varianten haben erfolglos versucht, freie drittelzahlige Ladungen (Quarks) nachzuweisen.

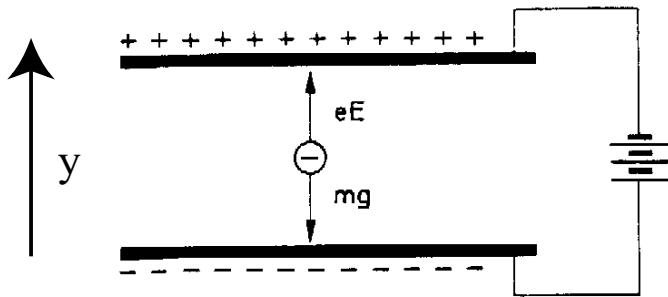


Abbildung 4: Prinzip des Versuchs von Millikan (aus Haken, Wolf).

Im nächsten Abschnitt werden Verfahren diskutiert, die Massen von Atomen zu messen. Mit diesen Apparaten wurde auch die Masse der Elektronen zu $9.1094 \cdot 10^{-31}$ kg bzw.

$$W_{0,e} = 0.51100\text{MeV} \quad (30)$$

bestimmt.

2.2.3 Der Radius des Elektrons

Besonders interessant ist die Frage nach dem Radius des Elektrons. Streuversuche ähnlich zu denen, die bei der Bestimmung der Kernradien benutzt werden (Abschn. 2.5.1), führen nur zu oberen Grenzen $r_e < 10^{-18}$ m. Das Elektron ist also elementar im Sinne der Definition Euklids „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“. In der klassischen Physik bedeutet ein Radius $< 10^{-15}$ m ein ernstes Problem. Die Energiedichte ρ_E des elektrischen Feldes einer Punktladung ist durch

$$\rho_E = \frac{\alpha \hbar c}{4\pi r^4} \quad (31)$$

gegeben. Die Integration von einem minimalen Radius r_{\min} bis ∞ ergibt für die im Feld gespeicherte Energie

$$W_E = \frac{\alpha \hbar c}{r_{\min}} . \quad (32)$$

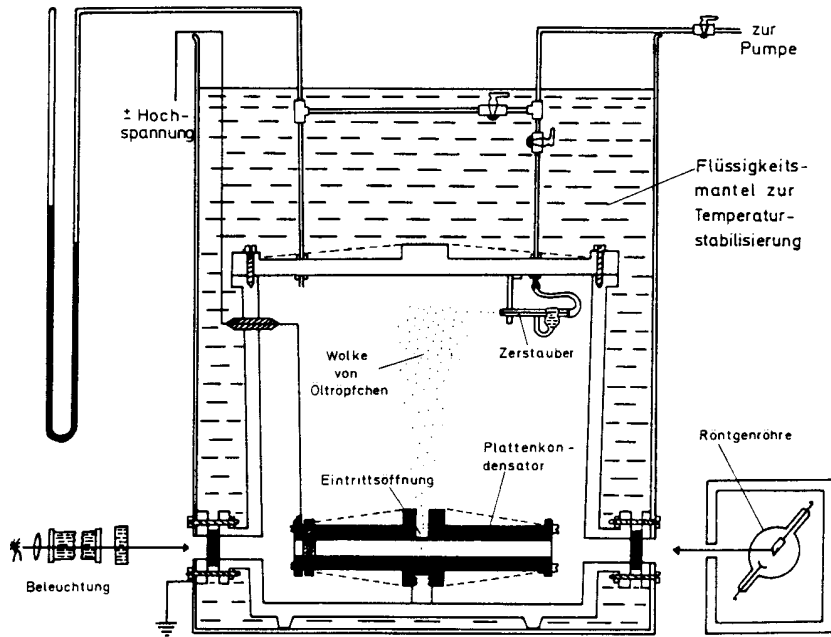


Abbildung 5: Versuchsaufbau von Millikan (aus Haken, Wolf) .

Gleichsetzung mit der Ruheenergie des Elektrons liefert den sog. klassischen Elektronenradius

$$r_e = \frac{\alpha \hbar c}{W_{0,e}} \quad (33)$$

mit dem Zahlenwert $2.8179 \cdot 10^{-15}$ m. Umgekehrt gehört zu einem Radius von 10^{-18} m also eine Ruheenergie von 0.5 GeV !

Die Anwendung solcher Rechnungen ist aber im Mikrokosmos, wo die Gesetze der Quantenmechanik herrschen, verboten. Eigentlich wird dieses Problem erst im Rahmen der Quantenfeldtheorie gelöst. Diese mildert die lineare Divergenz der Feldenergie

$$W_E = W_{0,e} \frac{r_e}{r_{\min}} \quad (34)$$

zu einer logarithmischen

$$W_E = W_{0,e} \left(1 + \frac{3\alpha}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r_{\min}} \right) \quad (35)$$

mit $r_0 = \hbar c / W_{0,e}$ ab. Die beobachtete Größe ist die Ruhemasse $W_{0,e}$, die nicht von dem „cutoff Radius“ r_{\min} abhängen darf. Daher renormieren wir die letzte Gleichung zu

$$W_{0,e} = W_0 \left(1 + \frac{3\alpha}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r_{\min}} \right) , \quad (36)$$

worin W_0 ein unbeobachtbarer Parameter ist, der sich in der hier gezeigten Näherung mit dem jeweils gemessenen Wert von r_{\min} ändert.

2.3 Bestimmung der Atommassen

2.3.1 Massenspektrometer

Zur absoluten (und relativen) Bestimmung von Atommassen dienen Massenspektrometer. In ihnen wird die Bahn von Ionen in elektrischen und magnetischen Feldern gemessen. Die Masse des Atoms ergibt sich dann aus

$$M_{\text{Atom}} = M_{\text{Ion}} + m_e - W_B/c^2 \quad (37)$$

Die Korrektur auf die Bindungsenergie W_B des äußeren Elektrons ist vernachlässigbar klein (vergl. 10 eV mit einigen GeV).

Ionen lassen sich einfach in einer Gasentladung herstellen. In einem Magnetfeld B beschreibt ein geladenes Teilchen, das senkrecht zu den Feldlinien eintritt, aufgrund der Lorentzkraft $F_L = qvB$ wegen

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad (38)$$

einen Kreis mit dem Radius

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} . \quad (39)$$

(Die letzte Umformung bleibt auch für relativistische Teilchen gültig.) Bei Kenntnis von v kann also m , oder besser e/m bestimmt werden. Zur Messung von v werden elektrische Felder benutzt. Dort ist die Ablenkung umgekehrt proportional zur kinetischen Energie $mv^2/2$. Ein einfaches Geschwindigkeitsfilter kann aus gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern gebaut werden (Abb. 6. Der Ionenstrahl fliegt ohne Ablenkung durch, falls $F_{\text{el}} = F_{\text{magn}}$ gilt, also für

$$v = \frac{E}{B} . \quad (40)$$

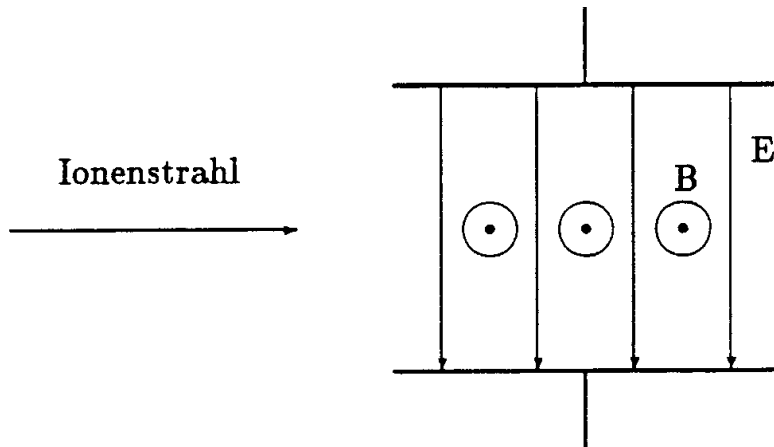


Abbildung 6: Prinzip eines Geschwindigkeitsfilters.

Zur Erzielung einer hohen Genauigkeit und (kurzer Messzeit) müssen alle von einer punktförmigen Quelle (Spalt) mit gleicher Geschwindigkeit ausgehenden Ionen in einen Punkt abgebildet werden (Richtungsfokussierung). In einer Koordinate ist dies durch Sektormagnete

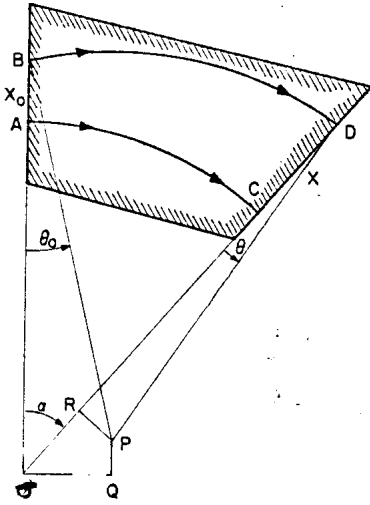


Abbildung 7: Prinzip des Sektormagneten. (Aus S. Penner, Rev. of Sc. Instruments 32)

möglich (Abb. 7). Die senkrecht ein- und austretenden Strahlen definieren eine Sollbahn mit dem Radius (39). In einem mitbewegten Koordinatensystem (z -Koordinate entlang der Bahn) gilt bei Vernachlässigung von Termen 2. Ordnung

$$x = x_0 \cos \alpha + x'_0 R \sin \alpha \quad (41)$$

wobei x_0, x'_0 Ort und Steigung der Teilchenbahn am Eintritt in den Magneten sind. Wenn man noch die Gleichung für x' mitnimmt läßt sich das Ergebnis in der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_S \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

anschreiben, wobei die Matrix M_S für einen Sektormagneten durch

$$M_S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & R \sin \alpha \\ \frac{-\sin \alpha}{R} & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (43)$$

gegeben ist.

Diese Beziehung kann man entweder durch geometrische Konstruktion unter Benutzung der Abb. 7 oder dynamisch beweisen. Wir skizzieren kurz den zweiten Weg. In der Bahnebene lautet die Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten (Abb. 8)

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = eB_0 r \dot{\theta} \quad (44)$$

für ein positiv geladenes Teilchen in einem homogenen Feld der Stärke B_0 entlang der Y -Achse. Die Geschwindigkeit $v = r\dot{\theta}$ ist konstant und kann durch den Wert $v = \omega R$ auf der Sollbahn ersetzt werden. Damit erhalten wir

$$m\ddot{r} - m \frac{\omega^2 R^2}{r} = eB_0 \omega R . \quad (45)$$

Auf der Sollbahn gilt $\ddot{r} = 0$ und deshalb $\omega = -eB_0/m$. Dies entspricht (38), wenn man beachtet, daß es dort nur auf die Beträge ankam. Damit kann nun eB_0 auf der rechten Seite der

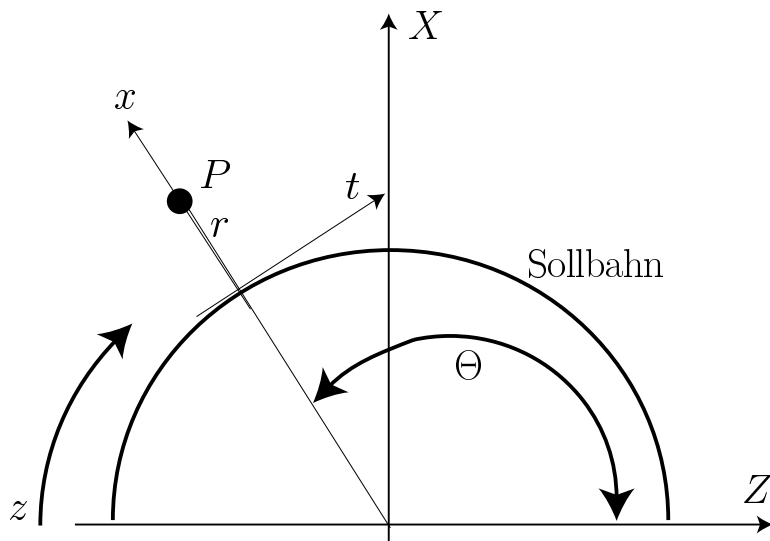


Abbildung 8: Die Koordinatensysteme zur Diskussion der Bahngleichung (47).

letzten Gleichung ersetzt werden. In einem auf der Sollbahn mitbewegten Koordinatensystem (x, t) setzen wir noch $r = R + x$ an und erhalten mit $x \ll R$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (46)$$

und schließlich mit $v = z/t$ und $x' = dx/dz$ die Bahngleichung

$$x'' + \frac{1}{R^2} x = 0 \quad (47)$$

Diese Gleichung, die ebenfalls in der relativistischen Rechnung gültig bleibt, hat (43) mit $\alpha = z/R$ als Lösung.

Bei einem 180° -Magneten reduziert sich diese Matrix auf

$$M_{180} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

d.h. er wirkt fokussierend, da der Ort am Austritt nicht vom Winkel am Eintritt abhängt. Die Kombination eines Geschwindigkeitsfilters mit einem 180° -Magneten ergibt das Massenspektrometer von Bainbridge.

Eine andere beliebte Spektrometerform ist das in Abb. 9 gezeigte 60° -Spektrometer. In der gezeigten symmetrischen Kombination mit 2 freien Strecken $a = R\sqrt{3}$ ist es fokussierend. Zum Beweis multipliziert man (43) von rechts und links mit der Matrix

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

einer freien Strecke L und zeigt, daß das Element M_{12} verschwindet.

Das Massenspektrometer von Aston (Abb. 10) ist geschwindigkeitsfokussierend. Ionen gleicher Masse aber verschiedener Geschwindigkeit werden auf einen Punkt (Linie) fokussiert. Das

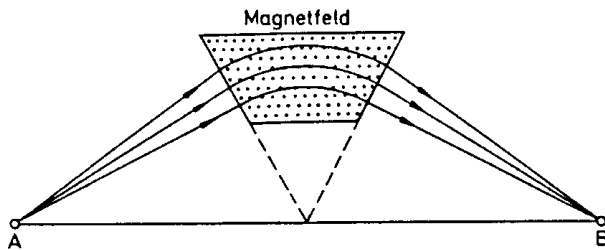


Abbildung 9: Ein 60° -Sektormagnet in symmetrischer Anordnung. Abb. aus Haken, Wolf Atom- und Quantenphysik.

Spektrometer besteht aus einem Zylinderkondensator (el. Feld) und einem Sektormagneten. Die theoretische Behandlung ist verwickelt, aber die prinzipielle Idee ist klar. Der Ablenkwinkel im Kondensator ist $\sim 1/W_{\text{kin}}$, während der Ablenkwinkel im Magneten $\sim 1/p$ ist. Es findet also in der gezeigten Anordnung eine Kompensation statt. Moderne Spektrometer benutzen eine Kombination von Geschwindigkeits- und Richtungsfokussierung. Es sind ionenoptisch komplizierte Geräte.

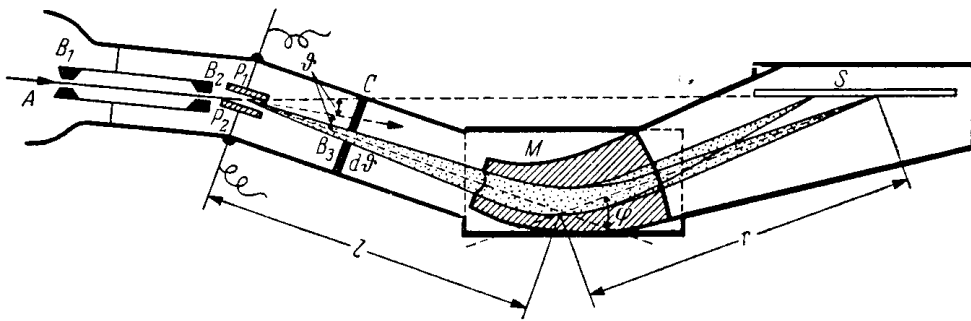


Abbildung 10: Das Astonsche Massenspektrometer. (Abb. aus Schpolski, Atomphysik).

Die magnetische Fokussierung in einem Sektorfeld ist relativ schwach. Die sog. starke Fokussierung beruht auf der Verwendung von Gradientenfeldern. Als Beispiel behandeln wird den magnetischen Quadrupol. Das Feld wird zwischen den vier Polen eines Eisenmagneten mit hyperbelförmiger Oberfläche der Pole (Abb. 11) erzeugt. Da bei nicht zu großen Feldstärken die Oberfläche des Eisens eine magnetische Äquipotentialfläche darstellt, steigen die Feldkomponenten in x - und y -Richtung linear mit einem Gradienten g an,

$$\begin{aligned} B_x &= gy \\ B_y &= gx \end{aligned} \quad (50)$$

während das Feld in z -Richtung verschwindet, $B_z = 0$; Teilchen auf der Strahlachse (der z -Achse der Abb. 11) sehen also kein Magnetfeld.

Um die fokussierende Wirkung dieses Feldes zu beweisen, betrachten wir die Bahn eines Teilchens in der xz -Ebene (Abb. 12). Die x -Komponente der Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ist

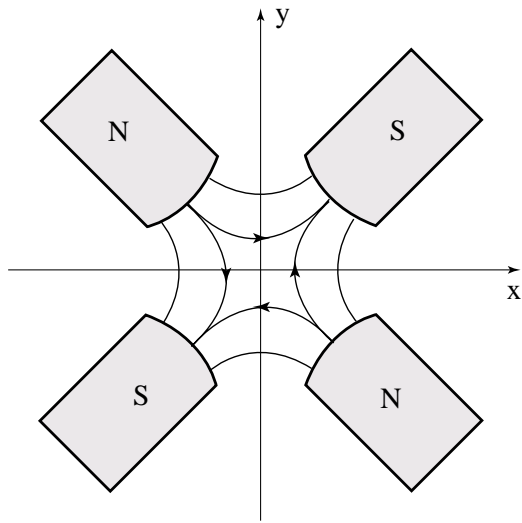


Abbildung 11: Ansicht eines Quadrupols aus Eisen mit einer Skizze seiner Feldverteilung. Die Polung ist so gewählt, daß g in (50) positiv wird.

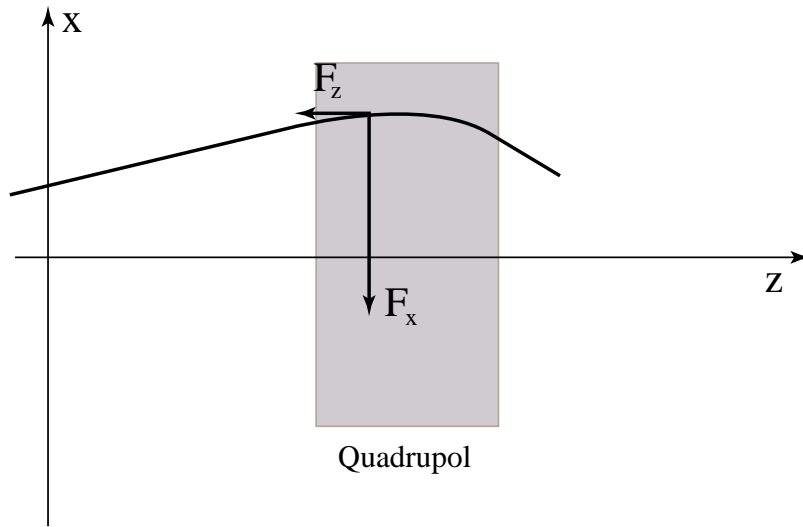


Abbildung 12: Wirkung des Quadrupolfeldes auf ein geladenes Teilchen.

durch

$$F_x = -evB_y \quad (51)$$

gegeben, da nach Voraussetzung $B_z = 0$ ist und wir für Teilchen mit kleiner Neigung zur Strahlachse v_z durch v ersetzen können. Aufgrund der Beziehung $B_y = gx$ wirkt auf Protonen eine rücktreibende Kraft in x -Richtung, falls der Gradient g des Feldes positiv ist (wie im Beispiel der Abb. 11). Wegen $F_y = ecB_x$ sieht man aber sofort ein, daß mit einer Fokussierung in der x -Richtung eine Defokussierung in der y -Richtung (und umgekehrt) verknüpft ist.

Aus (51) folgt unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$\frac{dp_x}{dt} = -evgx \quad (52)$$

Die Steigung $x' = dx/dz$ der Bahn ist durch v_x/v_z gegeben und kann für kleine Werte von x' durch p_x/p angenähert werden. Ebenso kann dt durch dz/v ersetzt werden, da die kleine Kraft in z -Richtung die Geschwindigkeit relativistischer Teilchen kaum ändert. Aus der Bewegungsgleichung (52) wird also die Bahngleichung

$$x'' \equiv \frac{dx'}{dz} = -kx \quad , \quad (53)$$

wobei noch die als Quadrupolstärke bezeichnete Abkürzung

$$k = \frac{eg}{p} \quad (54)$$

benutzt wurde. Der Quadrupol wirkt in der xz -Ebene fokussierend für $k > 0$ und defokussierend für $k < 0$. Das Umgekehrte gilt in der yz -Ebene. Mit $y'' = ky$ erhalten wir Defokussierung für $k > 0$ und Fokussierung für $k < 0$. Das Vorzeichen von k wird offensichtlich durch die Vorzeichen der Ladung und des Feldgradienten g festgelegt.

Wir untersuchen nun vereinfachend einen Quadrupol, dessen Feldgradient im Inneren unabhängig von der z -Koordinate ist, während er außen abrupt verschwindet (sog. Rechteckverteilung des Feldes). Die Lösungen der Bahngleichung sind für einen solchen Quadrupol der Länge L elementar. Für $k > 0$ ist (53) eine Schwingungsgleichung, also sind Ortskoordinate und Steigung der Teilchenbahn am Ende des Quadrupols durch

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \Omega + \frac{x'_0}{\sqrt{|k|}} \sin \Omega \\ x' &= -x_0 \sqrt{|k|} \sin \Omega + x'_0 \cos \Omega \end{aligned} \quad (55)$$

gegeben. Das Symbol Ω steht für $\sqrt{|k|}L$. Für $k < 0$ erhält man hingegen

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cosh \Omega + \frac{x'_0}{\sqrt{|k|}} \sinh \Omega \\ x' &= x_0 \sqrt{|k|} \sinh \Omega + x'_0 \cosh \Omega \quad . \end{aligned} \quad (56)$$

Daher gelten die Matrizen:

$$\mathbf{M}_F = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sin \Omega \\ -\sqrt{|k|} \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \quad (57)$$

und

$$\mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} \cosh \Omega & \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh \Omega \\ \sqrt{|k|} \sinh \Omega & \cosh \Omega \end{pmatrix} \quad (58)$$

für einen fokussierenden bzw. defokussierenden Quadrupol.

Mit Massenspektrometern kann eine Auflösung bis $\Delta M/M \approx 10^{-8}$ erreicht werden. Als Detektor wird z.B. eine Fotoplatte verwendet, die durch die auftreffenden Ionen geschwärzt wird. Abb. 13 zeigt ein Beispiel für die erreichte optische Qualität und Auflösung.

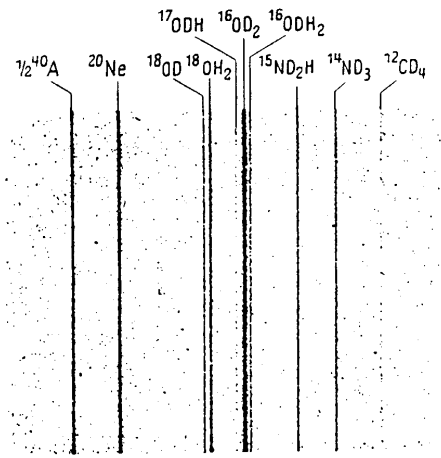


Abbildung 13: Trennung von 10 verschiedenen Ionen deren relative Atommasse zwischen 19.9878 und 20.0628 liegt. (Aus Haken, Wolf, Atom- und Quantenphysik) .

2.3.2 Ionenfallen

Alle bisher besprochenen Geräte benutzen eine Kombination von statischen elektrischen und magnetischen Feldern. Insbesondere der Magnet macht daher diese Apparate schwer und groß. Das von W. Paul entwickelte Massenfilter (Nobelpreis 1989) benutzt elektrische Wechselfelder. Es ist klein und leicht. Es besteht aus 4 metallischen Hyperbeln, experimentell reichen runde Stangen (Abb. 14). Für das Potential gilt

$$V = \frac{U}{r_0^2}(x^2 - y^2) \quad (59)$$

und daher

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2Uy}{r_0^2} \\ E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-2Ux}{r_0^2} \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Es liegt also ein elektrisches Quadrupolfeld vor.

Die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen der Ladung e lauten:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{2eUx}{r_0^2} &= 0 \\ m\ddot{y} - \frac{2eUy}{r_0^2} &= 0 \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Wie beim magnetischen Quadrupol ist eine fokussierende Lösung (stabile Bahn) nur entweder in der x - oder y Koordinate möglich. Falls anstelle der statischen Spannungen U Wechselfelder

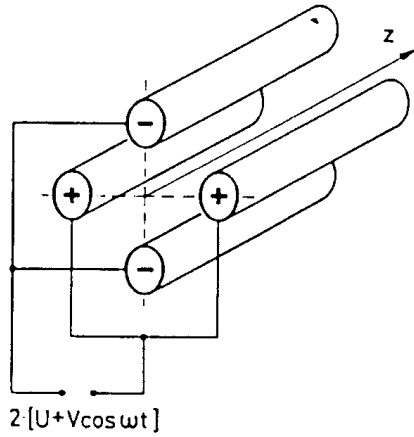


Abbildung 14: Schema des Massenfilters nach W. Paul.

$U = U_0 \cos \omega t$ verwendet werden lauten die Bahngleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{2eU_0}{r_0^2}x \cos \omega t &= 0 \\ m\ddot{y} - \frac{2eU_0}{r_0^2}y \cos \omega t &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Diese Differentialgleichungen sind vom Matthieuschen Typ (periodische Koeffizienten). Ihre allgemeine Form lautet

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + (a \pm 2q \cos 2\xi)\chi = 0 \quad (63)$$

mit Koeffizienten a, q , die in unserem Beispiel die Werte $a = 0$

$$q = \frac{4eU_0}{r_0^2 m \omega^2} \quad (64)$$

annehmen, während die Variable ξ durch $\omega t/2$ gegeben ist. Die Gleichung hat für bestimmte a, q Bereiche stabile Lösungen, d.h. Fokussierung in beiden Richtungen (Abb. 15,16).

Für $a = 0$ legt das q -Band den Massenbereich $\Delta m/m$ der Ionen fest, die im Empfänger nachgewiesen werden können.

Eine Variante des Massenfilters ist der Paulsche Ionenkäfig. Hier sind die Pole zu einem Kreis aufgewickelt. Eine andere Art von Ionen- oder Elektronenkäfig bildet die sog. Penning-Falle (Abb. 17). Sie arbeitet mit statischen B - und E -Feldern. Ohne E -Feld laufen die Teilchen auf einem Kreis in der Ebene senkrecht zur z -Ache. Aus (38) wird die Umlauffrequenz (Zyklotronfrequenz) zu

$$f = \frac{eB}{2\pi m} \quad (65)$$

berechnet. In z -Richtung sind die Bahnen nicht fokussiert. Mit E -Feld gibt es stabile Bahnen, deren Berechnung etwas komplizierter ist. Mit diesem Käfig lassen sich die genauesten

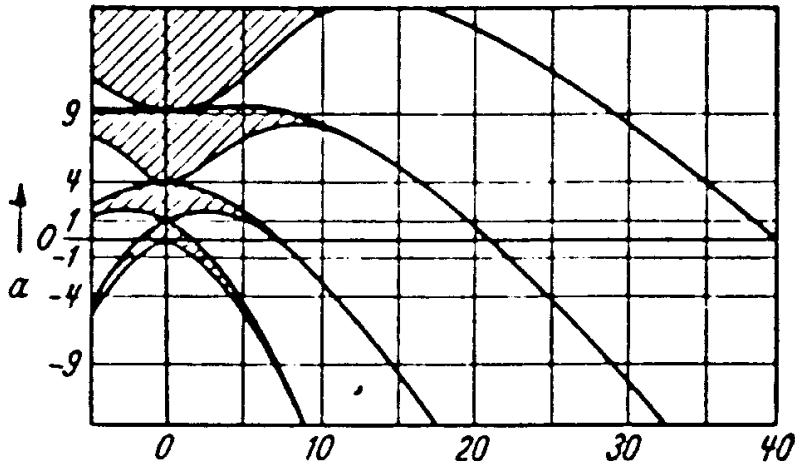


Abbildung 15: Stabilitätsdiagramm des Massenfilters. Ionen, deren a - und q -Werte innerhalb des schraffierten Bereiche liegen, durchlaufen stabile Bahnen. (aus W. Paul, Raether Z. Physik 140)

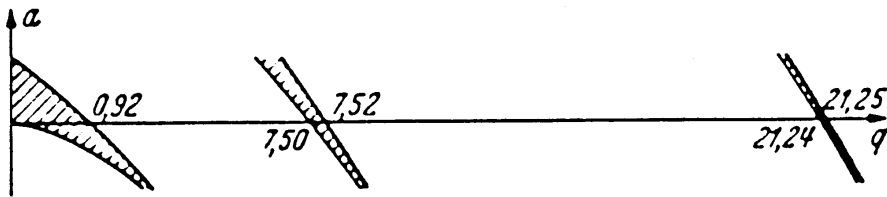


Abbildung 16: Stabilitätsdiagramm für das Beispiel des Textes mit reiner Wechselspannung, d.h. $a = 0$. (aus W. Paul, Raether Z. Physik 140)

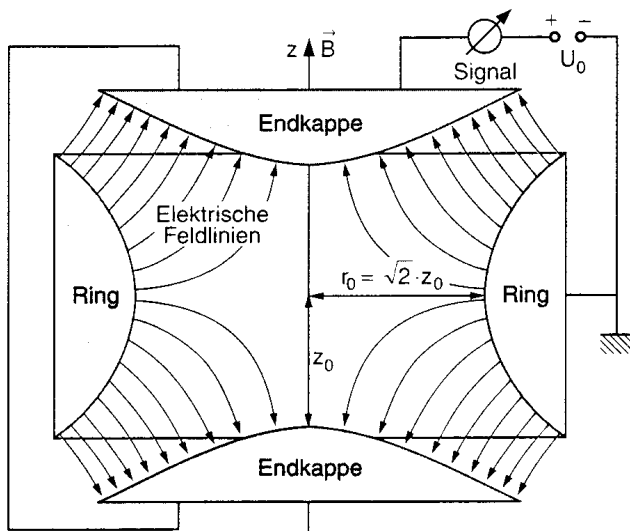


Abbildung 17: Prinzip der Penningfalle (Aus Demtröder, Physik III).

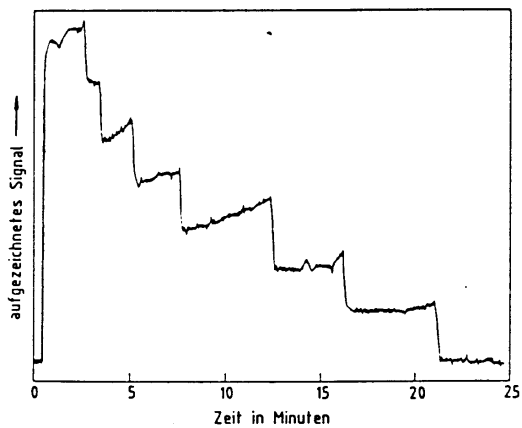


Abbildung 18: Spannungssignal der in einer Penningfalle gefangenen Elektronen. Das Spannungssignal, das axial schwingende Elektronen an der Deckelektrode induzieren, gestattet es, die Elektronen abzuzählen. Die Anregung der Schwingung war so stark, daß die Elektronen nacheinander aus dem Käfig fielen. Wird die Anregung verkleinert, sobald nur noch ein Elektron im Käfig ist, läßt sich dieses Elektron wochenlang speichern. Nobelpreis 1989 für H.G. Dehmelt. (aus Physikalische Blätter 45 1989,Nr.12)

Bestimmungen der Masse und Ladung von Teilchen durchführen (Auflösung $< 10^{-8}$). Es ist gelungen, einzelne Elektronen lange Zeit zu speichern (Abb. 18).