

Physik IV (Atomphysik)

Vorlesung SS 2003

Prof. Ch. Berger

Zusammenfassung

Das Skript gibt eine gedrängte Zusammenfassung meiner Vorlesung an der RWTH Aachen im SS 2003. Verglichen mit vielen, auch neueren Lehrbüchern wird versucht, alte Zöpfe abzuschneiden. Sie werden also keine Diskussion des Bohrschen Atom-Modells finden, die Behandlung des Zeeman-Effekts ist auf das nötigste zusammengedrängt, der Stark-Effekt fehlt, etc.etc. Bitte weisen Sie eventuell Ihre Prüfer im Vordiplom darauf hin.

3.2 Materiewellen

3.2.1 Elektronenbeugung

Davisson und Germer untersuchten die Reflexion von Elektronen an einem Nickel-Einkristall. Auch hier wurden bei bestimmten Winkeln (Abb. 35) abhängig von der Energie der Elektronen die für Interferenzen typischen Intensitätsmaxima gefunden (Nobelpreis 1937 für C.J. Davisson). Die Lage der Maxima wird durch die Bragg-Bedingung (99) beschrieben, wenn man nach einem Vorschlag von de Broglie (Nobelpreis 1929) Elektronen mit dem Impuls $p = m\gamma v$ eine Materiewelle der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (126)$$

zuordnet. Diese Gleichung werden wir häufig in der Form

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (127)$$

benutzen, worin \mathbf{k} der Vektor der Wellenzahl ist, $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$. Der Impuls der Elektronen kann wieder einfach aus der Energie, d.h. aus der Beschleunigungsspannung errechnet werden. Für nichtrelativistische Elektronen formen wir daher (126) zu

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2W_{0,e}W_{\text{kin}}}} \quad (128)$$

um. Zu einer Spannung von 1kV gehört also eine Wellenlänge von 0.0388 nm! Die Anwendbarkeit von (99) bedeutet, daß auch der Brechungsindex von Materiewellen vernachlässigt werden kann. Dies ist bei Spannungen um 100 V nicht mehr der Fall.

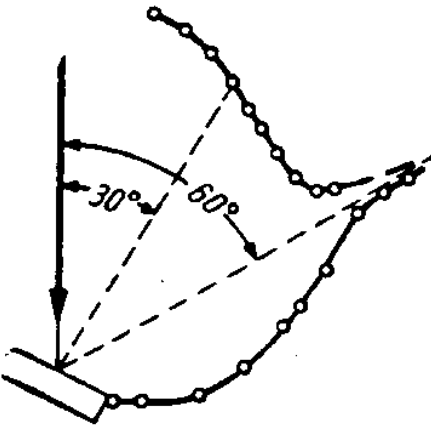


Abbildung 35: Polardiagramm der Intensitätsverteilung bei der Reflexion von Elektronen an einem Ni-Einkristall. Aus Schpolski, Atomphysik.

Für die Frequenz der Materiewellen gilt wie bei den Photonen

$$f = \frac{W}{h} \quad (129)$$

bzw.

$$\omega = \frac{m\gamma c^2}{\hbar} . \quad (130)$$

Damit ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$c_m = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v} \quad (131)$$

ein Ergebnis, das nicht im Widerspruch zur Relativitätstheorie steht, da der Signaltransport nicht mit der Phasengeschwindigkeit erfolgt. (Auch in den Hohlleitern der klassischen elektromagnetischen Wellentheorie gilt $c_{ph} > c$.) Im Gegensatz dazu hat die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \quad (132)$$

das anschaulich erwartete Ergebnis.

3.2.2 Die Heisenbergschen Unschärferelationen

Die Zuordnung einer Welle zu einem Teilchen führt unvermeidlich zu Interferenzerscheinungen, wie wir gerade gesehen haben. Dazu gehört auch die Beugung. In einem Gedankenexperiment kann man die Beugung einer Materiewelle an einem einzelnen Spalt der Breite D betrachten (Abb.36). Das erste Minimum der Intensität liegt dann bei $\sin \Theta = \lambda/D$. Der Spalt steht entlang der y -Achse eines Koordinatensystems. Nach dem Spalt hat der Impuls, der vor dem Spalt nur die Richtung der z -Achse hatte, eine Komponente entlang der y -Achse, die durch $p_y = p_z \tan \Theta$ festgelegt ist. In der Kleinwinkelnäherung werden also die Werte des Impulses in der y -Richtung durch

$$p_y \approx \frac{h}{D} \quad (133)$$

oder $p_y D \approx h$ abgeschätzt. Es ist also grundsätzlich nicht möglich, den Impuls in y -Richtung beliebig genau festzulegen. Mit $D = 2\Delta y$ und $\Delta p_y = h/D$ folgt als minimales Produkt der Unsicherheiten

$$\Delta p_y \Delta y = \frac{h}{2} . \quad (134)$$

Unabhängig von der speziellen Herleitung gilt diese grundlegende Relation für alle Paare von Raum- und Impulskoordinaten. Im Beispiel der einfallenden ebenen Welle ist mit dem „scharfen“ Impuls in z -Richtung ein unendlicher Wert von Δz verknüpft. Das Teilchen kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo in der Welle gefunden werden.

In der Fehlertheorie ist es üblich, als Maß der Unsicherheit die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert zu benutzen, z.B.

$$\sigma_y^2 = \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle , \quad (135)$$

wobei $\langle y \rangle$ der Mittelwert von y ist. Für einen gleichmäßig ausgeleuchteten Spalt der Breite D gilt z.B. $\sigma_y = D/\sqrt{12}$. Erwartungswerte physikalischer Observablen werden in der nichtrelativistischen Quantenmechanik mit Hilfe der Schrödingergleichung berechnet. In den

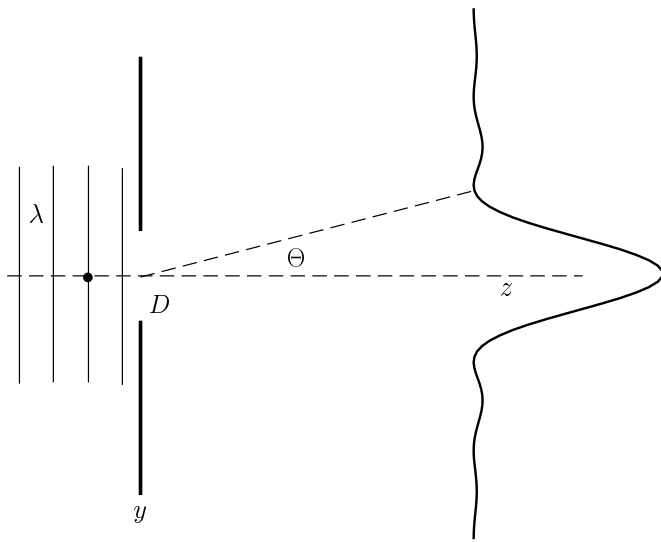


Abbildung 36: Beugung einer Materiewelle an einem Spalt.

Lehrbüchern der Quantenmechanik wird gezeigt, wie dadurch die naive Form (134) der Unschärferelation in die präzise Formulierung

$$\Delta p_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (136)$$

abgeändert wird. Unschärferelationen gelten für alle konjugierten Variablen der Hamiltonschen Mechanik also natürlich neben (136) auch für die Paare x, p_x und z, p_z . Ebenso sind die Unschärfen von Energie und Zeit über

$$\Delta W \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (137)$$

miteinander verknüpft.

In den Unschärferelationen gibt das Gleichheitszeichen die aufgrund der Quantenmechanik nicht unterschreitbare Grenze. Jede zusätzliche Fehlerquelle führt zu einem größeren Produkt. Die sog. quantenmechanischen Effekte lassen sich alle qualitativ durch richtige Anwendung der Unschärferelationen (und des Pauli-Prinzips) verstehen. Insofern bilden diese die gedankliche Basis der Quantenmechanik. Wir geben zwei Beispiele:

Die Stabilität der Atome: Das klassische Modell des Wasserstoffatoms besteht aus einem Elektron, welches durch die Coulombkraft gebunden auf einer Kreisbahn um den Kern, das Proton, läuft. Aus dem Kräftegleichgewicht

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\alpha \hbar c}{r^2} \quad (138)$$

folgt für die Summe von kinetischer und potentieller Energie

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha \hbar c}{r} = -\frac{\alpha \hbar c}{2r} \quad (139)$$

In dieser Gleichung sind alle Werte von r möglich. Elektronen auf Kreisbahnen strahlen aber elektromagnetische Wellen ab, und so wird das Elektron nach innen spiralen, das H-Atom ist instabil. Die von einem Elektron auf einer Kreisbahn abgestrahlte Leistung kann ebenfalls aus (112) entnommen werden, wenn für a die Kreisbeschleunigung eingesetzt wird. Wir erhalten daher

$$P = \frac{2\alpha \hbar r^2 \omega^4}{3c^2} . \quad (140)$$

Aus (138) wird

$$\omega^2 = \frac{\alpha \hbar c}{mr^3} \quad (141)$$

berechnet. Einsetzen in (140) gibt

$$P = (2\alpha \hbar c)^3 \frac{c}{3W_{0,e}^2 r^4} \quad (142)$$

mit dem numerischen Resultat $P \approx 4 \cdot 10^{11}$ eV/s bei $r = 0.05$ nm. Die diesem Radius entsprechende Energie von ca. 15 eV ist also in $5 \cdot 10^{-11}$ s aufgezehrt. In Wirklichkeit erfolgt der Kollaps eines Wasserstoffatoms in der klassischen Physik noch viel schneller ($\approx 10^{-16}$ s), da beim Spiralen nach innen die abgestrahlte Leistung $\sim r^{-4}$ ansteigt.

Der entscheidende Fehler der klassischen Rechnung ist die Annahme definierter Bahnen mit scharfen Werten von r und p . In der Quantenmechanik gibt es keine definierten Bahnen. Mit der (etwas willkürlichen) Abschätzung $pr = \hbar$ wird (139) durch

$$W = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{\alpha \hbar c}{r} \quad (143)$$

ersetzt. Diese Energie hat ein Minimum bei dem Bohrschen Radius

$$a_B = \frac{\hbar c}{\alpha W_{e,0}} \quad (144)$$

mit dem Zahlenwert 0.052923 nm. Die minimale Energie beträgt

$$W_{\min} = -\frac{1}{2}\alpha^2 W_{e,0} \quad (145)$$

mit dem Zahlenwert -13.606 eV.³ Strahlungsübergänge aus einem energetisch höher gelegenen Zustand in den Grundzustand sind erlaubt.

Der Tunneleffekt: Ein Teilchen laufe entlang der z -Achse auf einen Potentialwall zu, der in Abb. 37 der Einfachheit halber rechteckförmig angenommen wurde. In der klassischen Physik erfolgt immer eine Reflexion am Wall, solange $W_{\text{kin}} < V_0$ gilt. In der Quantenmechanik kommt es auf die Dicke des Potentialwalls an. In der Zeit $\Delta t = d/v$, die das Teilchen zum Durchqueren des Walls braucht sind Energiefuktuationen $\Delta W = \hbar/(2\Delta t)$ möglich. Es werden also Teilchen rechts vom Wall gefunden werden, falls

$$(V_0 - W_{\text{kin}}) \frac{d}{v} \leq \frac{\hbar}{2} \quad (146)$$

erfüllt ist. Dieser Effekt wird häufig beobachtet, z.B. beim „Tunneln“ von Elektronen durch eine Oberfläche, α -Zerfall der Kerne etc.

³Eine typische atomare Energieeinheit ist daher $R_y = 13.606$ eV (Rydberg).

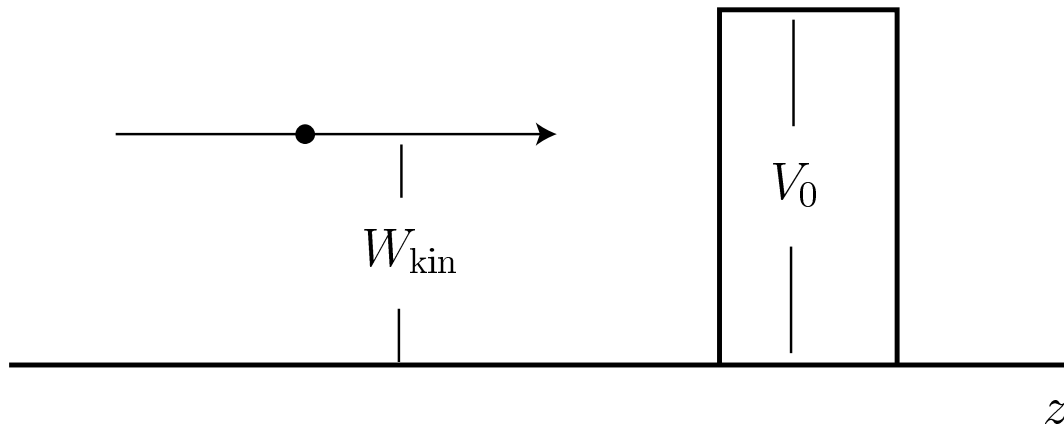


Abbildung 37: Unschärferelation und Tunneleffekt.

3.2.3 Prinzipien der Quantenmechanik

Die in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Phänomene werden oft als „Welle-Teilchen-Dualismus“ bezeichnet und eine Art klassisches Verständnis quantenmechanischer Effekte läßt sich so von Fall zu Fall erreichen. Dies ist aber nicht wirklich sinnvoll. Die Quantenmechanik erlaubt eine einheitliche Beschreibung des Verhaltens von Photonen und Elektronen. Die klassischen Bewegungsgesetze und Gesetze der Wellenausbreitung können aus den Gesetzen der Quantenmechanik abgeleitet werden, falls man in Bereiche des Phasenraums $\Delta p \Delta x$ übergeht, in denen \hbar vernachlässigt werden kann, in denen also die Unschärferelationen keine Rolle mehr spielen. Diesen Beweis führen wir hier nicht durch, sondern geben nur das Grundprinzip der Quantenmechanik in einer möglichst einfachen Form an. Es läßt sich am Beispiel des Doppelspalt-Versuchs für Elektronen formulieren (Abb 38). In diesem Gedankenexperiment treffen Elektronen von links auf zwei dünne Spalte S_1, S_2 im Abstand d und werden in der Ebene des Schirms z.B. über die Schwärzung eines Films nachgewiesen. Zusätzlich gibt es einen oder mehrere Geigerzähler. Dieses Instrument beweist, daß immer einzelne Elektronen auf den Schirm auftreffen. Man kann die Intensität der Quelle so einstellen, daß innerhalb der Zeitauflösung des Zählers immer nur ein Elektron zwischen Quelle und Schirm ist. Wenn jeweils einer der Spalte verschlossen wird, sind die Intensitätsverteilungen auf dem Schirm diffus, etwa in der angedeuteten Art. Wenn beide Spalte offen sind, gibt es jedoch ein klares Interferenzmuster, das (in großer Entfernung) dem gewohnten Bild der Optik

$$I = I_0(1 + \cos(kd \sin \Theta)) \quad (147)$$

mit $k = |\mathbf{k}|$ aus (127) entspricht. Zur quantitativen Beschreibung dieser Interferenz wird einem Elektron, das durch Spalt 1 an eine Stelle y des Schirms gelangt die komplexe Wahrscheinlichkeitsamplitude A_1 zugeordnet. Ein Elektron, das durch Spalt 2 an die gleiche Stelle gelangt, wird durch A_2 beschrieben. Für die Intensität gilt

$$I \sim |A_1 + A_2|^2 . \quad (148)$$

Es macht keinen Sinn zu versuchen, zu verstehen, wie ein Elektron, das alleine im Apparat ist, „weiß“, durch welchen Spalt es gehen muß, um das Interferenzmuster zu erzeugen. Jeder

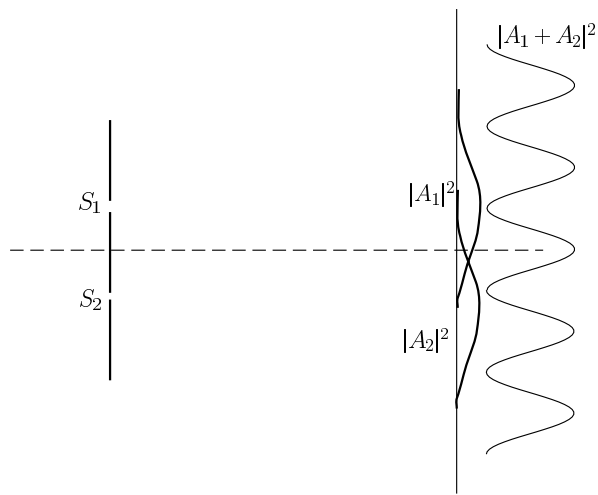


Abbildung 38: Der Doppelspalt-Versuch in der Quantenmechanik.

Versuch, das Wirken der quantenmechanischen Gesetze etwa durch Detektoren im Raum hinter den Spalten aufzuklären, zerstört das Interferenzmuster und es gilt

$$I \sim |A_1|^2 + |A_2|^2 . \quad (149)$$

Dies wird wieder durch Diskussion der Unschärferelation klar. Wir verwenden maximale Fehlerabschätzungen. Um festzustellen, ob eine Elektron durch Spalt 1 oder 2 gegangen ist, muß der Ort des Elektrons mit einer Genauigkeit $\Delta y < d/2$ gemessen werden. Jede Messung erzeugt aber einen Rückstoß auf das Elektron. Dieser Rückstoßimpuls darf das Interferenzmuster nicht zerstören, also z.B. aus einem Maximum ein Minimum machen. Es muß also $\Delta p_y \ll \lambda p/(2d)$ und insgesamt

$$\Delta p_y \Delta y \ll \frac{h}{4} \quad (150)$$

im Widerspruch zur (naiven Form) der Unschärferelation gelten.