

# **Physik IV (Atomphysik)**

## **Vorlesung SS 2003**

Prof. Ch. Berger

### **Zusammenfassung**

Das Skript gibt eine gedrängte Zusammenfassung meiner Vorlesung an der RWTH Aachen im SS 2003. Verglichen mit vielen, auch neueren Lehrbüchern wird versucht, alte Zöpfe abzuschneiden. Sie werden also keine Diskussion des Bohrschen Atom-Modells finden, die Behandlung des Zeeman-Effekts ist auf das nötigste zusammengedrängt, der Stark-Effekt fehlt, etc.etc. Bitte weisen Sie eventuell Ihre Prüfer im Vordiplom darauf hin.

### 4.3 Spin und magnetisches Moment des Elektrons

In der klassischen Elektrodynamik ist das magnetische Moment  $\mu$  einer von einem Strom  $I$  umflossenen Fläche  $A$  definiert als

$$\mu = IA \quad . \quad (227)$$

In einem homogenen magnetischen Feld (Induktion  $B$ ) wirkt auf diesen Dipol ein Drehmoment

$$T = \mu \times B \quad , \quad (228)$$

das versucht  $A$  parallel zu  $B$  auszurichten. Dann hat die potentielle Energie

$$W_{\text{pot}} = -\mu B \quad (229)$$

ein Minimum. In inhomogenen Magnetfeldern tritt zusätzlich eine Kraft

$$F_x = \mu \nabla B_x \quad (230)$$

(und entsprechend für die anderen Komponenten) auf.

Im klassischen Atommodell beschreibt das Elektron eine Kreisbahn. Der zugehörige Strom ist durch  $I = ef$  gegeben, also gilt für den Betrag des magnetischen Moments  $\mu = ef\pi r^2$  bzw. mit<sup>7</sup>  $L = m_e r^2 \omega$

$$\mu = \frac{e}{2m_e} L \quad . \quad (231)$$

In Vektorform lautet diese Beziehung

$$\mu = -\frac{e}{2m_e} L \quad . \quad (232)$$

Der Vektor des magnetischen Moments steht wegen der negativen Ladung des Elektrons antiparallel zum Drehimpulsvektor. In der Quantenmechanik wird entsprechend der Quantisierung des Drehimpulses (232) in

$$\mu = -\frac{\mu_B}{\hbar} L \quad (233)$$

mit

$$\mu = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \quad (234)$$

und

$$\mu_z = -\mu_B m \quad (235)$$

umgeformt, wobei das Bohrsche Magneton  $\mu_B$  durch

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (236)$$

mit dem Zahlenwert  $\mu_B = 5.7884 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$  definiert ist. Für die Energie im im Magnetfeld gilt entsprechend

$$W_{\text{pot}} = m\mu_B B \quad , \quad (237)$$

---

<sup>7</sup>In diesem Abschnitt müssen wir die Elektronenmasse durch einen Index kennzeichnen, da  $m$  auch als Quantenzahl gebraucht wird.

d.h. die Energien und die dazugehörigen Einstellmöglichkeiten des magnetischen Moments sind quantisiert. Die magnetischen Energien sind allerdings klein. Selbst in dem sehr hohen Magnetfeld von 10 T gilt  $\Delta W_{\text{pot}} \approx 6 \cdot 10^{-4}$  eV. Die beobachteten Spektren der Atome liefern jedoch eine glänzende Bestätigung dieser Zusammenhänge.

Bisher wurden nur die magnetischen Effekte des Bahndrehimpulses behandelt. Das berühmte Experiment von Stern und Gerlach bewies aber, daß Elektronen auch im Zustand  $l = 0$  ein magnetisches Moment und damit einen Drehimpuls haben. Dieser wird *Spin* genannt. Im Experiment wird ein Strahl von Wasserstoffatomen durch ein inhomogenes Magnetfeld (Abb. 45) geschickt. Das ursprüngliche Experiment wurde mit Silberatomen durchgeführt. Das macht aber keinen Unterschied, da auch der Grundzustand des Silbers  $l = 0$  hat. Falls das Elektron ein magnetisches Moment besitzt, richtet sich dieses auf der Strahlachse ( $z, y = 0$ ) entlang der  $z$ -Achse aus. Zusätzlich wirkt die Kraft

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} , \quad (238)$$

welche den Strahl entsprechend der Einstellmöglichkeiten von  $\mu_z$  in verschiedene Strahlen aufspaltet. Das ungeheuer überraschende Ergebnis des Versuchs war nun, daß hinter dem Magneten zwei Teilstrahlen gefunden wurden. Unter der Annahme, daß die Quantisierung des magnetischen Moments wieder durch die Quantisierung des Drehimpulses erfolgt, ergibt sich für die Spinquantenzahl  $s$  in

$$S_e = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (239)$$

zwingend  $s = 1/2$  und  $s_z = \pm 1/2$ , also

$$S_e = \frac{1}{2}\sqrt{3}\hbar \quad (240)$$

mit den  $z$ -Komponenten

$$S_z = \pm \frac{1}{2}\hbar . \quad (241)$$

Die Untersuchung der Spektren von Atomen im Magnetfeld zeigte nun, daß die magnetische Energie durch

$$W_{\text{pot}} = \pm \mu_B B \quad (242)$$

gegeben ist. Der Zusammenhang (237) muß also zu

$$W_{\text{pot}} = g s_z \mu_B B \quad (243)$$

mit  $g = 2$  modifiziert werden. Gewarnt durch dieses Ergebnis wird man also (233) folgend den allgemeinen Zusammenhang zwischen einem Drehimpuls  $\mathbf{J}$  im Atom und dem dazugehörigen magnetischen Moment  $\boldsymbol{\mu}$  durch

$$\boldsymbol{\mu} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{J} \quad (244)$$

festlegen. Der Anomaliefaktor  $g$  hat die speziellen Werte  $g = 1$  für den Bahndrehimpuls und  $g = 2$  für den Spin der Elektronen. Dies führt zu komplizierten  $g$ -Faktoren, falls der Drehimpuls der Elektronenhülle aus Bahn- und Spinanteilen zusammengesetzt werden muß. Darauf werden wir noch näher eingehen.

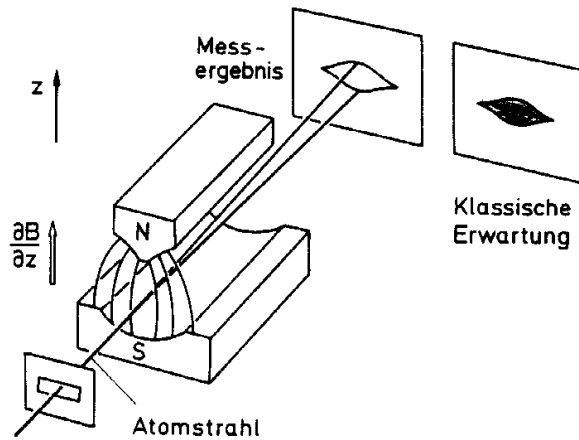


Abbildung 45: Der Versuch von Stern und Gerlach zum Nachweis von Spin und magnetischem Moment des Elektrons. Aus Haken, Wolf Atom- und Quantenphysik.

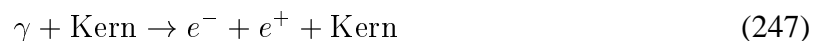
Spin und Magnetismus der Elektronen haben ihre vollständige Aufklärung in Diracs Theorie relativistischer Elektronen gefunden. Paul A.M. Dirac suchte nach einer Differentialgleichung für die  $\psi$ -Funktion, die sowohl in den den Ableitungen nach der Zeit als auch nach dem Ort nur von 1. Ordnung war und gleichzeitig den relativistischen Energiesatz

$$\left( \sqrt{\mathbf{p}_{\text{op}}^2 c^2 + m_e^2 c^4} \right) \psi = W_{\text{op}} \psi \quad (245)$$

erfüllte. Er fand, daß dies möglich war, wenn anstelle der einfachen  $\Psi$ -Funktion vier 4-komponentige Spaltenvektoren

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (246)$$

als Lösung zugelassen wurden (Nobelpreis 1933). Er konnte zeigen, daß die Lösungen  $\Psi_i$  mit  $i = 1, 2$  zu den zwei Zuständen eines relativistischen Elektrons mit Spin  $1/2$  gehören. Die beiden anderen Lösungen gehören zu einem Spin  $1/2$  Teilchen mit positiver Ladung! Die Positronen, die Antimaterie der Elektronen, waren zu dieser Zeit noch nicht entdeckt und wurden später von Carl D. Anderson (Nobelpreis 1936) in der Reaktion



unter Verwendung hochenergetischer Photonen aus der Höhenstrahlung gefunden. Die Existenz von Antimaterie, d.h. von Teilchen, deren Masse exakt gleich der Teilchenmasse ist, die aber in Quantenzahlen wie der Ladung sich im Vorzeichen von den Teilchen unterscheiden, ist eine der wichtigsten Entdeckungen der Atomphysik.

Ähnlich wie im Fall der Schrödingergleichung wird die Dirac-Gleichung auf Teilchen in äußeren Feldern erweitert. Besonders wichtig ist die Untersuchung der Lösungen in einem

statischen Magnetfeld. Die zu den Spinkomponenten  $s_z = \pm 1/2$  gehörigen Eigenwerte der potentiellen Energie lauten

$$W_{\text{pot}} = \pm \mu_B B \quad (248)$$

wie in (242). Das sog. anomale magnetische Moment der Elektronen hat damit eine fundamentale Erklärung gefunden.

Für die späteren Anwendungen ist es wichtig, daß im Grenzfall  $v \rightarrow 0$  die Lösungen der Dirac-Gleichung in die Lösungen  $\Psi_S$  der Schrödingergleichung übergehen, die mit zweikomponentigen Spaltenvektoren zur Bezeichnung der Spinzustände ( $m_s = \pm 1/2$ ) multipliziert werden, also

$$\Psi_1 \rightarrow \Psi_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (249)$$

für „Spin auf“ und

$$\Psi_2 \rightarrow \Psi_S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (250)$$

für „Spin ab“.

Zum Abschluß soll noch die Frage behandelt werden, warum der Stern-Gerlach-Versuch mit Atomen und nicht direkt mit freien Elektronen durchgeführt werden muß. Man könnte zunächst meinen, daß die Ablenkung der Elektronen im Magnetfeld unterdrückt werden muß. Es ist zwar wesentlich einfacher einen geraden Magneten mit starkem Gradientenfeld zu bauen, aber prinzipiell ist durchaus denkbar, die  $x$ -Achse des Magneten in Abb. 45 entlang der Sollbahn der Elektronen zu krümmen. Auf der anderen Seite hat jedoch jeder Strahl, dessen Zentrum sich im Ursprung der Abb. 45 befindet, eine endliche Ausdehnung  $2\Delta y$ . Ein Teilchen mit den Koordinaten  $y = \Delta y, z = 0$  erfährt die Lorentzkraft

$$F_z = evB_y = ev \frac{\partial B_y}{\partial y} \Delta y = -ev \frac{\partial B_z}{\partial z} \Delta y \quad , \quad (251)$$

wobei die letzte Umformung wegen  $\nabla \mathbf{B} = 0$  und  $B_x=0$  gilt. Damit eine Aufspaltung des Strahls beobachtet werden kann muß nun die Kraft auf das magnetische Moment groß gegenüber der Lorentzkraft sein, also

$$\mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z} \gg ev \frac{\partial B_z}{\partial z} \Delta y \quad . \quad (252)$$

Die letzte Bedingung wird leicht in  $p\Delta y \ll \hbar/2$  und wegen  $p \geq \Delta p_y$  in

$$\Delta p_y \Delta y \ll \frac{\hbar}{2} \quad (253)$$

umgeformt. Diese Beziehung widerspricht aber der Unschärferelation!